# 第 3 章 機率

## 3-1 條件機率與獨立事件

### 重點整理

以一個數值表示事件發生的可能性，此數值稱為機率。

#### 一、機率的性質

設 $S$ 是某一試驗的樣本空間，$A$ 是樣本空間 $S$ 的任一事件。

1. 對於任意事件 $A$，其發生的機率必定大於或等於 0，小於或等於 1。

   **說明**：$P(A)\geq 0$，$P(A)\leq 1$，即 $0\leq P(A)\leq 1$。

2. 必然事件發生的機率等於 1；不可能事件發生的機率等於 0。

   **說明**：$S$ 的必然事件就是 $S$，必然發生，所以 $P(S)=1$。不可能事件就是 $\varnothing$，不含樣本點，所以 $P(\varnothing)=0$。

3. 若事件 $A$ 與事件 $B$ 互斥（即不可能同時發生），則$P(A\cup B)=P(A)+P(B)$。

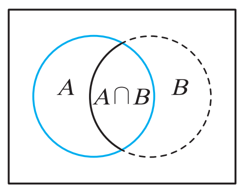
   **說明**：$A$、$B$ 互斥即 $A\cap B=\varnothing$，$P(A\cap B)=P(\varnothing)=0$，所以
   $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A)+P(B)$。

4. 若事件 $A'$ 為事件 $A$ 的餘事件，則 $P(A')=1-P(A)$。

   **說明**：因為 $P(A)+P(A')=1$，所以 $P(A')=1-P(A)$。

#### 二、條件機率

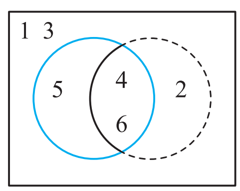
如右圖，在事件 $A$ 發生的條件下，討論事件 $B$ 發生的機率，相當於把 $A$ 看成樣本空間，討論 $A\cap B$ 的機率。




▨ 條件機率

設 $A$，$B$ 為樣本空間 $S$ 中的兩事件，且 $P(A)>0$。則在事件 $A$ 發生的條件下，事件 $B$ 發生的條件機率為 $P(B\mid A)=\dfrac{n(A\cap B)}{n(A)}=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$。

**例**：擲一顆公正骰子，已知擲出點數大於 3，則擲出偶數點的機率為 $\dfrac{2}{3}$。



## 三、獨立事件

如果事件 $A$ 發生與否，不影響另一事件 $B$ 的機率，我們就說 $A$、$B$ 是獨立事件。

也就是說，$A$ 發生條件下 $B$ 發生的機率 = $B$ 發生的機率，即 $P(B|A)=P(B)$，所以 $\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}=P(B)$，移項得 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$。

1. 兩事件為獨立事件：

(1) 設 $A$，$B$ 為樣本空間 $S$ 中的兩事件，若 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$，則稱 $A$，$B$ 為獨立事件。

**例**：擲一顆公正骰子一次，令 $A$ 表示擲出奇數點的事件，$B$ 表示擲出 1 點或 2 點的事件，$C$ 表示擲出偶數點的事件，$D$ 表示擲出 1 點或 3 點的事件。因為 $P(A)=\dfrac{1}{2}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，$P(C)=\dfrac{1}{2}$，$P(D)=\dfrac{1}{3}$，

$P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$，$P(A\cap C)=0$，$P(A\cap D)=\dfrac{1}{3}$。顯然，

$P(A\cap B)=\dfrac{1}{6}$，且 $P(A)P(B)=\dfrac{1}{6}$，所以 $A$、$B$ 是獨立事件；

$P(A\cap C)=0$，但 $P(A)P(C)=\dfrac{1}{4}$，所以 $A$、$C$ 不是獨立事件；

$P(A\cap D)=\dfrac{1}{3}$，但 $P(A)P(D)=\dfrac{1}{6}$，所以 $A$、$D$ 不是獨立事件。

(2) 餘事件的獨立性：

若 $A$，$B$ 為獨立事件，則 $A'$，$B$ 為獨立事件，$A$，$B'$ 為獨立事件，$A'$，$B'$ 為獨立事件。

2. 三事件為獨立事件：

(1) 設 $A$，$B$，$C$ 為三事件，若同時滿足下列條件，稱 $A$，$B$，$C$ 三事件為獨立事件。

① $P(A\cap B)=P(A)P(B)$。

② $P(B\cap C)=P(B)P(C)$。

③ $P(A\cap C)=P(A)P(C)$。

④ $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$。

(2) 餘事件的獨立性：

設 $A$，$B$，$C$ 為獨立事件，則下列性質成立。

① $A'$，$B$，$C$ 為獨立事件

② $A'$，$B'$，$C$ 為獨立事件

③ $A'$，$B'$，$C'$ 為獨立事件

### 例題 1　機率性質的應用

小倫騎著腳踏車在鄉間小路閒逛，在每個十字路口必須決定直行、向右轉或向左轉。已知他向右轉的機率是 0.3，向左轉的機率是 0.2，試求：

(1) 他決定轉彎的機率。（3 分）

(2) 他決定直行的機率。（3 分）

(3) 他決定下車的機率。（4 分）

**解** 令 $A$、$B$、$C$ 代表直行、向右轉、向左轉這三個事件

顯然，樣本空間由 $A$、$B$、$C$ 這三個事件構成，而且它們彼此互斥

因此 $P(A)+P(B)+P(C)=1$

(1) 轉彎的機率：$P(B\cup C)=P(B)+P(C)=0.3+0.2=0.5$

(2) 直行的機率：$P(A)=1-P(B\cup C)=1-0.5=0.5$

(3) 下車的機率：此為不可能事件 $\varnothing$，$P(\varnothing)=0$

3-1

### 例題 2　機率的性質

已知 $P(A)=\dfrac{2}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{2}$，$P(A\cap B)=\dfrac{1}{4}$，試求：

(1) $P(A\cup B)$。（5 分）

(2) $P(A'\cap B')$。（5 分）

**解**

(1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{11}{12}$

(2) $P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=1-\dfrac{11}{12}=\dfrac{1}{12}$

### 例題 3　條件機率：一般問題

檢視段考成績，全班有 $\frac{5}{9}$ 的同學數學及格，有 $\frac{7}{9}$ 的同學英文及格，有 $\frac{4}{9}$ 的同學數學與英文都及格。現在任意抽選一位同學，試問：

(1) 若這位同學數學及格，則他英文及格的機率是多少？（5 分）

(2) 若這位同學英文及格，則他數學及格的機率是多少？（5 分）

**解** 設 $A$、$B$ 分別代表數學、英文及格的事件，則 $P(A)=\frac{5}{9}$，$P(B)=\frac{7}{9}$，$P(A\cap B)=\frac{4}{9}$

(1) $P(B\mid A)=\dfrac{P(B\cap A)}{P(A)}=\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{5}{9}}=\dfrac{4}{5}$

(2) $P(A\mid B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}=\dfrac{\frac{4}{9}}{\frac{7}{9}}=\dfrac{4}{7}$

3-1

### 例題 4　條件機率

袋中有 10 個裝有現金的紅包，金額及數量分別是 5 個 200 元、3 個 500 元、2 個 1000 元。假設每個紅包被抽到的機會都相等，今甲、乙、丙三位小朋友依序任意抽取一個，取後不放回，試求：

(1) 甲、乙都抽到 500 元的機率。（5 分）

(2) 已知甲、乙都抽到 200 元的條件下，丙抽到 500 元的機率。（5 分）

**解** (1) 設 $A$、$B$ 分別表示甲、乙抽到 500 元的事件

所求機率為 $\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$

(2) 設 $C$ 表示甲、乙都抽到 200 元的事件，$D$ 表示丙抽到 500 元的事件

所求機率為 $P(D\mid C)=\dfrac{P(C\cap D)}{P(C)}=\dfrac{\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}\times\frac{3}{8}}{\frac{5}{10}\times\frac{4}{9}}=\dfrac{3}{8}$

## 例題 5 檢驗兩事件是否獨立

擲一顆公正骰子一次，令事件 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{3,4,5,6\}$，$C=\{3,4,6\}$，試問：

(1) $A$ 與 $B$ 是否為獨立事件？（5 分）

(2) $A$ 與 $C$ 是否為獨立事件？（5 分）

**解** $P(A)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，$P(C)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$

(1) $A\cap B=\{3,4\}$，得 $P(A\cap B)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$P(A)P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$

故 $A$ 與 $B$ 不是獨立事件

(2) $A\cap C=\{3,4\}$，得 $P(A\cap C)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

$P(A)P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{3}$

故 $A$ 與 $C$ 是獨立事件

3-1

## 例題 6 三事件為獨立事件公式的應用

甲、乙、丙三人各自射擊一發子彈，根據過去的紀錄，三人的命中率分別是 $\frac{2}{3}$、$\frac{1}{3}$、$\frac{1}{2}$，且每個人命中與否為獨立事件，試問：

(1) 三人都命中的機率。（5 分）

(2) 恰有兩人命中的機率。（5 分）

**解** 設 $A$、$B$、$C$ 分別代表甲、乙、丙命中的事件

(1) 三人都命中的機率為 $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{9}$

(2) 恰有兩人命中的機率為

$$P(A\cap B\cap C')+P(A\cap B'\cap C)+P(A'\cap B\cap C)$$
$$=P(A)P(B)P(C')+P(A)P(B')P(C)+P(A')P(B)P(C)$$
$$=\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{2}\right)+\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{2}+\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$$
$$=\frac{7}{18}$$

翰林用心教師用精益求精

## 例題 7　獨立事件公式的計算(一)

假設 $A$、$B$ 為獨立事件，且 $P(A)=\frac{2}{3}$，$P(B)=\frac{3}{5}$，試求：

(1) $P(A\cap B')$。(5 分)

(2) $P(A'\cap B')$。(5 分)

解 (1) $A$、$B$ 為獨立事件，則 $A$、$B'$ 也是獨立事件

故 $P(A\cap B')=P(A)P(B')=\frac{2}{3}\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{15}$

(2) $A$、$B$ 為獨立事件，則 $A'$、$B'$ 也是獨立事件

故 $P(A'\cap B')=P(A')P(B')=\left(1-\frac{2}{3}\right)\times\left(1-\frac{3}{5}\right)=\frac{2}{15}$

3-1

## 例題 8　獨立事件公式的計算(二)

已知 $A$，$B$ 是兩獨立事件，且 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(A\cup B)=\frac{1}{2}$，試求：

(1) $P(B)$。(5 分)

(2) $P(B\mid A)$。(5 分)

解 $A$，$B$ 是獨立事件，故 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

(1) 因為 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

所以 $\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+P(B)-\frac{1}{3}P(B)$

$\frac{2}{3}P(B)=\frac{1}{6}$，故得 $P(B)=\frac{1}{4}$

(2) 因為 $A$、$B$ 獨立，所以 $P(B\mid A)=P(B)=\frac{1}{4}$

〈另解〉

將本題條件代入公式，可以得到相同的結果

$P(B\mid A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(A)P(B)}{P(A)}=P(B)=\frac{1}{4}$

### 例題 9 綜合應用問題(一)

袋中有大小相同的紅球 2 顆、白球 3 顆，今自袋中取球，假設每顆球被取出的機會均等，則：

(1) 甲每次取 1 球，取後放回，共取 4 次，試求取出球的顏色依序為紅、白、紅、白的機率。(5 分)

(2) 甲、乙依序輪流取球，每次取 1 球，取後不放回，先取到紅球者勝，試求甲在第 2 次取球時獲勝的機率。(5 分)

**解** (1) 所求機率為 $\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{36}{625}$

(2) 若甲在第 2 次取球時獲勝，則兩人取球的顏色依序為白、白、紅

故所求機率為 $\frac{3}{5}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{5}$



### 例題 10 綜合應用問題(二)

甲、乙兩人比賽桌球，約定 5 局勝 3 局者贏球(沒有和局)。根據過去經驗，每局比賽甲勝乙的機率為 $\frac{3}{5}$，假設每局比賽互不影響，試問：

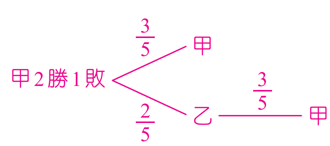
(1) 前兩局甲、乙各勝 1 局的機率。(5 分)

(2) 若贏球者可得獎金 3000 元，已知前 3 局甲 2 勝 1 敗，後來比賽因故中止，假設以兩人贏球的機率為比例來分配獎金，則甲可得獎金多少元？(5 分)

**解** (1) 前 2 局甲、乙各勝 1 局可能依序為「甲勝乙勝」或「乙勝甲勝」

故所求機率為 $\frac{3}{5}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{12}{25}$

(2) 甲只需再勝一局即可贏球，如右樹狀圖




甲贏球的機率為 $\frac{3}{5}+\frac{2}{5}\times\frac{3}{5}=\frac{15+6}{25}=\frac{21}{25}$

故甲可得獎金為 $3000\times\frac{21}{25}=2520$(元)