

第4章 矩陣

4-1 高斯消去法與矩陣

重點整理

一、高斯消去法

1. 方程組的基本操作：

- (1) 將某兩個方程式對調。
- (2) 將某個方程式乘以一個不為 0 的常數。
- (3) 將某個方程式乘以一個不為 0 的常數後，再加入到另一個方程式。

上列三個操作都不會改變方程組的解，高斯消去法的每一步驟都是上列操作之一。

2. 高斯消去法解三元一次方程組：

- (1) 利用第一個方程式的 x ，消去第二個與第三個方程式的 x 。
- (2) 再利用第二個方程式的 y ，消去第三個方程式的 y 。
- (3) 從第三個、第二個、第一個方程式逐步解出 z 、 y 、 x 。

補充：實際操作時，首先將 x 係數為 1 的方程式調整為第一個方程式。

$$\begin{aligned} \text{例：} \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x + y + z = 4 \\ x - 2y + 5z = 2 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ 2x + y - 3z = 1 \\ x - 2y + 5z = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -y - 5z = -7 \\ -3y + 4z = -2 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 4 \\ -y - 5z = -7 \\ 19z = 19 \end{cases} \Rightarrow \text{由第三式得 } z = 1, \text{ 代入第二式得 } y = 2, \\ &\text{代入第一式得 } x = 1. \end{aligned}$$

二、矩陣的列運算

1. 將方程組係數分離出來，寫成矩形陣列：

$$\text{例：將方程組 } \begin{cases} 2x + y - 3z = 1 \\ x + y + z = 4 \\ x - 2y + 5z = 2 \end{cases} \text{ 寫成 } \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -2 & 5 & 2 \end{pmatrix} \text{ 的 } 3 \times 4 \text{ 階矩陣形式，}$$

稱為方程組的增廣矩陣；不含常數項如 $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ 時，稱為係數矩陣。

2. 用矩陣的列運算解線性方程組：

- (1) 將某兩列對調。
- (2) 將某一行乘以一個不為 0 的常數。
- (3) 將某一行乘以一個不為 0 的常數後，再加入到另一列。

寫出線性方程組的增廣矩陣後，可以用上面三種列運算解方程組。

三、高斯消去法判斷三元一次方程組的解

1. 用高斯消去法可以判斷或解出三元一次方程組的解，形式有下列三種：
 - (1) 恰有一組解。
 - (2) 無限多組解。
 - (3) 無解。

2. 插值多項式：

在坐標平面上給定一些資料點，滿足這些點的多項式稱為插值多項式。

例：已知 $f(x)$ 為二次多項式，試求 $f(x)$ 使其圖形通過 $(-2, 6)$ ， $(1, -3)$ ， $(2, 2)$ 。

設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，將 $(-2, 6)$ ， $(1, -3)$ ， $(2, 2)$ 分別代入，整理得

$$\begin{cases} a + b + c = -3 \\ 4a + 2b + c = 2 \\ 4a - 2b + c = 6 \end{cases}, \text{對矩陣} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 1 & 6 \end{array} \right] \text{做高斯消去法,}$$

得 $a = 2$ ， $b = -1$ ， $c = -4$ ，故 $f(x) = 2x^2 - x - 4$ 。

四、空間向量的線性組合

已知坐標空間中三個非零向量 \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} ，將任意向量 \vec{d} 表為 $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$ ，則：

1. \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} 不共平面：恰有一種表示法。
2. \vec{a} ， \vec{b} ， \vec{c} 共平面：無法表示；或無限多種表示法。

例題 1 高斯消去法解三元一次方程組

利用高斯消去法解方程組
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 3y + z = 10 \\ 3x - 4y - 4z = -10 \end{cases} \text{。 (10分)}$$

解
$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ 2x + 3y + z = 10 \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 3x - 4y - 4z = -10 \cdots \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$$

將 $\textcircled{1} \times (-2) + \textcircled{2}$ ， $\textcircled{1} \times (-3) + \textcircled{3}$ 得

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \cdots \cdots \cdots \textcircled{4} \\ -y + 3z = 8 \cdots \cdots \cdots \textcircled{5} \\ -10y - z = -13 \cdots \cdots \cdots \textcircled{6} \end{cases}$$

將 $\textcircled{5} \times (-10) + \textcircled{6}$ 得

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \cdots \cdots \cdots \textcircled{7} \\ -y + 3z = 8 \cdots \cdots \cdots \textcircled{8} \\ -31z = -93 \cdots \cdots \cdots \textcircled{9} \end{cases}$$

由 $\textcircled{9}$ 得 $z = 3$ ，代入 $\textcircled{8}$ 得 $y = 1$

再將 $y = 1$ ， $z = 3$ 代入 $\textcircled{7}$ 得 $x = 2$

故方程組的解為 $x = 2$ ， $y = 1$ ， $z = 3$

例題 2 線性方程組的增廣矩陣與係數矩陣

(1) 請寫出線性方程組 $\begin{cases} 3x + y + z = 11 \\ x + 5y - 2z = -1 \\ 2x - y + 3z = 12 \end{cases}$ 的

- ① 係數矩陣。(3分)
② 增廣矩陣。(3分)

(2) 某三元一次聯立方程式的增廣矩陣為 $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 0 & 1 & 1 \\ 8 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \end{array} \right]$ ，試寫出此三元一次聯立方程式。

(4分)

解

(1) ① $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

② $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 5 & -2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 12 \end{array} \right]$

(2) $\begin{cases} 3x + z = 1 \\ 8x + 4y + 3z = 2 \\ 2x + 5y + 6z = 4 \end{cases}$

例題 3 高斯消去法及矩陣列運算解線性方程組(一)

試用矩陣列運算解三元一次方程組 $\begin{cases} 3x + 4y - z = 5 \\ x + y + z = 4 \\ 2x - 3y + 4z = 7 \end{cases}$ 。(10分)

解

利用增廣矩陣進行列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 & 5 \\ 2 & -3 & 4 & 7 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \times(-3) \\ \leftarrow \times(-2) \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & -5 & 2 & -1 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \times 5 \\ \leftarrow \end{array} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & -18 & -36 \end{array} \right]$$

對應方程組為 $\begin{cases} x + y + z = 4 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ y - 4z = -7 \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \\ -18z = -36 \cdots \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$

由③得 $z = 2$ 代入②得 $y = 1$ ，再將 $y = 1, z = 2$ 代入①得 $x = 1$ ，故方程組解為 $x = 1, y = 1, z = 2$

例題 4 高斯消去法及矩陣列運算解線性方程組(二)

試用矩陣列運算解三元一次方程組 $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \\ 2x - y - 7z = -7 \\ 4x + 3y - 9z = 1 \end{cases}$ 。(10分)

解 利用增廣矩陣進行列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & -1 & -7 & -7 \\ 4 & 3 & -9 & 1 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \times(-2) \\ \times(-4) \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \end{array} \right] \xrightarrow{\times\left(-\frac{1}{5}\right)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & -5 & -15 \end{array} \right] \xrightarrow{\times 5} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

對應的方程組為 $\begin{cases} x + 2y - z = 4 \cdots\cdots\cdots\textcircled{1} \\ y + z = 3 \cdots\cdots\cdots\textcircled{2} \\ 0z = 0 \cdots\cdots\cdots\textcircled{3} \end{cases}$

令 $z = t$ 代入 $\textcircled{2}$ 得 $y = 3 - t$ ，再將 $y = 3 - t$ ， $z = t$ 代入 $\textcircled{1}$ 得 $x = -2(3 - t) + t + 4 = -2 + 3t$

故方程組解為 $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 3 - t \\ z = t \end{cases}$ ， t 為任意實數

例題 5 高斯消去法及矩陣列運算解線性方程組(三)

試用高斯消去法及矩陣列運算解三元一次方程組 $\begin{cases} x - y - z = 1 \\ 3x - 5y + 4z = 12 \\ x - 3y + 6z = 11 \end{cases}$ 。(10分)

解 利用增廣矩陣進行列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 3 & -5 & 4 & 12 \\ 1 & -3 & 6 & 11 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \times(-3) \\ \times(-1) \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 9 \\ 0 & -2 & 7 & 10 \end{array} \right] \xrightarrow{\times(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right]$$

對應的方程組為 $\begin{cases} x - y - z = 1 \cdots\cdots\cdots\textcircled{1} \\ -2y + 7z = 9 \cdots\cdots\cdots\textcircled{2} \\ 0z = 1 \cdots\cdots\cdots\textcircled{3} \end{cases}$

第 $\textcircled{3}$ 式為矛盾式，故方程組無解

例題 6 已知方程組解的狀況求係數

已知方程組
$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 7 \\ 2x + 5y + z = 6 \\ 4x + 9y + 11z = a \end{cases}$$
 有解，試求實數 a 。(10分)

解 利用增廣矩陣進行列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 2 & 5 & 1 & 6 \\ 4 & 9 & 11 & a \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \times(-2) \\ \times(-4) \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & 9 & -8 \\ 0 & -3 & 27 & a-28 \end{array} \right] \xrightarrow{\times(-3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 7 \\ 0 & -1 & 9 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & a-4 \end{array} \right]$$

對應的方程組為
$$\begin{cases} x + 3y - 4z = 7 & \text{.....①} \\ -y + 9z = -8 & \text{.....②} \\ 0z = a - 4 & \text{.....③} \end{cases}$$

顯然第③式為 $0z = 0$ 才有解，故令 $a - 4 = 0$ 得 $a = 4$

例題 7 增廣矩陣的列運算

某增廣矩陣
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & c \\ 2 & b & 4 & 7 \\ 4 & 2 & a & 8 \end{array} \right]$$
 經過列運算以後，化成
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$
，試求序組 (a, b, c) 。

(10分)

解
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$
 對應的方程組為
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ y + 2z = 3 \\ z = 2 \end{cases}$$

代入解之依序可得 $z = 2, y = -1, x = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & c \\ 2 & b & 4 & 7 \\ 4 & 2 & a & 8 \end{array} \right]$$
 對應的方程組為
$$\begin{cases} x + 2y + 3z = c \\ 2x + by + 4z = 7 \\ 4x + 2y + az = 8 \end{cases}$$

將 $(x, y, z) = (1, -1, 2)$ 代入，可得
$$\begin{cases} 1 - 2 + 6 = c \\ 2 - b + 8 = 7 \\ 4 - 2 + 2a = 8 \end{cases}$$
，則 $a = 3, b = 3, c = 5$

故得序組 $(a, b, c) = (3, 3, 5)$

例題 8 就增廣矩陣列運算後的係數討論方程組的解

試就 a, b 的值討論方程組 $\begin{cases} x - 2y + 2z = 6 \\ 3x - 5y + 4z = 13 \\ 2x + y + az = b \end{cases}$ 的解。(10分)

解 利用增廣矩陣進行列運算

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 6 \\ 3 & -5 & 4 & 13 \\ 2 & 1 & a & b \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \times(-3) \\ \times(-2) \\ \times(-5) \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 5 & a-4 & b-12 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 6 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & a+6 & b+13 \end{array} \right] \end{aligned}$$

故知 $a \neq -6$ 時，恰有一組解

$a = -6$ 且 $b = -13$ 時，有無限多組解

$a = -6$ 且 $b \neq -13$ 時，無解

例題 9 三元一次方程組的應用(一)：求二次函數的係數

已知一元二次函數 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 圖形通過 $(1, 2)$, $(2, 8)$, $(-2, -4)$ ，試求序組 (a, b, c) 。(10分)

解

將 $(1, 2)$, $(2, 8)$, $(-2, -4)$ 代入得 $\begin{cases} a + b + c = 2 \\ 4a + 2b + c = 8 \\ 4a - 2b + c = -4 \end{cases}$

利用增廣矩陣進行列運算

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & 8 \\ 4 & -2 & 1 & -4 \end{array} \right] \xrightarrow{\begin{array}{l} \times(-4) \\ \times(-4) \end{array}} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & -6 & -3 & -12 \end{array} \right] \\ & \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & -12 \end{array} \right] \end{aligned}$$

對應的方程組為 $\begin{cases} a + b + c = 2 \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ -2b - 3c = 0 \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \\ 6c = -12 \cdots \cdots \cdots \textcircled{3} \end{cases}$

$c = -2$ 代入 $\textcircled{2}$ 得 $-2b = 3c = -6 \Rightarrow b = 3$

再將 $b = 3, c = -2$ 代入 $\textcircled{1}$ 得 $a = 2 - 3 - (-2) = 1$

故序組 $(a, b, c) = (1, 3, -2)$

例題 10 三元一次方程組的應用(二)：空間向量的線性組合

給定空間中四個向量 $\vec{a}=(1, 0, 1)$, $\vec{b}=(3, 1, 2)$, $\vec{c}=(-1, 1, 1)$, $\vec{d}=(6, 0, 3)$, 試將 \vec{d} 表成 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 的線性組合。(10分)

解 設 $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ 得 $(6, 0, 3)=(x, 0, x)+(3y, y, 2y)+(-z, z, z)$

$$\text{即} \begin{cases} x+3y-z=6 \\ y+z=0 \\ x+2y+z=3 \end{cases}$$

利用增廣矩陣進行列運算

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \times (-1) \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -3 \end{array} \right] \begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \times 1$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{array} \right]$$

$$\text{對應的方程組為} \begin{cases} x+3y-z=6 \cdots \cdots \text{①} \\ y+z=0 \cdots \cdots \text{②} \\ 3z=-3 \cdots \cdots \text{③} \end{cases}$$

由③得 $z=-1$ 代入②得 $y=1$, 再將 $y=1, z=-1$ 代入①得 $x=2$
故得 $\vec{d}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$