

一、單選題(每題5分，共10分)

1. 擲3枚均勻硬幣一次，樣本空間有幾個元素(樣本)？

- (A) 3 個 (B) 6 個 (C) 8 個 (D) 9 個 (E) 12 個

解 每一枚硬幣可能出現正面或反面由乘法原理得 $2 \times 2 \times 2 = 8$

故選(C)

2. 桌上有一枝鋼筆、一枝鉛筆、一個橡皮擦、一把尺與一個鉛筆盒等5種文具，如果任意分給4個小朋友，可能有人全拿，也可能有人全無，則分法共有幾種？

- (A) 16 種 (B) 20 種 (C) 25 種 (D)
- 4^5
- 種 (E)
- 5^4
- 種

解 這是重複排列的問題(也可以用乘法原理解釋)

每一種文具都有4個選擇(小朋友)，有5種文具

分法有 4^5 種

故選(D)

二、多選題(每題5分,所有選項均答對者得5分,錯一個選項得3分,錯兩個選項得1分,其餘不給分,共10分)

3. 下列各選項是有關邏輯敘述的基本概念與運算,請選出正確的選項。

- (A)敘述「 $x=1 \Rightarrow x^2=1$ 」中,「 $x=1$ 」是「 $x^2=1$ 」的必要條件
 (B)敘述「 $\triangle ABC$ 三邊邊長相等 $\Leftrightarrow \triangle ABC$ 三個內角相等」中,「 $\triangle ABC$ 三個內角相等」是「 $\triangle ABC$ 三邊邊長相等」的充要條件
 (C)敘述「 $x>3$ 」的否定敘述為「 $x<3$ 」
 (D)敘述「 $a>0$ 且 $b\leq 0$ 」的否定敘述為「 $a\leq 0$ 且 $b>0$ 」
 (E)敘述「所有的 x 都大於 0」的否定敘述為「至少有一個 x 小於或等於 0」

解 (A) $\times$: 「 $x=1$ 」是「 $x^2=1$ 」的充分條件

(B) $\bigcirc$: 「 $\triangle ABC$ 三個內角相等」與「 $\triangle ABC$ 三邊邊長相等」互為充要條件

(C) $\times$: 否定敘述為「 $x\leq 3$ 」

(D) $\times$: 否定敘述為「 $a\leq 0$ 或 $b>0$ 」

(E) $\bigcirc$: 「所有的 x 都」的否定敘述為「至少有一個 x 」
 「大於 0」的否定敘述為「小於或等於 0」

故選(B)(E)

4. 某社團有 12 名社員,恰好 6 名男性,6 名女性。下列敘述哪些正確?

- (A)協調 3 名社員負責宣傳活動(每人都可以擔任),有 220 種方法
 (B)協調 3 名社員打掃辦公室,但社員小雯自願擔任,有 55 種方法
 (C)安排 10 人參加成果發表會,有 120 種方法
 (D)選出 5 名理事,但每種性別擔任理事的人數不得少於理事員額的三分之一,有 600 種方法
 (E)選出理事以後,再由這 5 人選出 3 人擔任常務理事,有 3^5 種方法

解 (A) $\bigcirc$: $C_3^{12} = 220$ (種)

(B) $\bigcirc$: $C_2^{11} = 55$ (種)

(C) $\times$: $C_{10}^{12} = 66$ (種)

(D) $\bigcirc$: 每種性別至少 2 人,分為男 3 女 2、男 2 女 3 兩種情形

$$C_3^6 \times C_2^6 + C_2^6 \times C_3^6 = 300 + 300 = 600 \text{ (種)}$$

(E) $\times$: 5 人選出 3 人,是基本組合問題

$$\text{當選名單有 } C_3^5 = 10 \text{ (種)}$$

故選(A)(B)(D)

三、填充題(每格 5 分, 共 60 分)

5. 同時擲公正的骰子 2 顆, 試求:

- (1) 點數和小於 10 的機率為_____。
(2) 恰好出現一個 3 的機率為_____。

解 $n(S) = 6^2 = 36$

(1) 令點數和大於或等於 10 的事件

$$A = \{(6, 6), (6, 5), (5, 6), (6, 4), (5, 5), (4, 6)\}$$

$$n(A) = 6, P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \text{所求為 } P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

(2) 令恰好出現一個 3 的事件

$$B = \{(3, 1), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (1, 3), (2, 3), \\ (4, 3), (5, 3), (6, 3)\}$$

$$n(B) = 10$$

$$\text{所求為 } P(B) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

6. (1) 已知小華身上的硬幣共有 40 元, 其硬幣可能是 5 元, 也可能是 10 元。(例如: 4 個 10 元, 或 3 個 10 元 2 個 5 元, 或 8 個 5 元), 則小華身上的硬幣組合有_____種可能。
(2) 假設小華身上有 2 個 10 元硬幣, 4 個 5 元硬幣, 將這 6 個硬幣在桌上排成一列, 共有_____種方法。

解 (1) 列表如下

10 元	4	3	2	1	0
5 元	0	2	4	6	8

故有 5 種可能

(2) 2 個 10 元硬幣, 4 個 5 元硬幣, 做「有相同物的排列」

$$\therefore \frac{6!}{2! \times 4!} = 15 (\text{種})$$

7. (1) 將 6 枝完全不同的鉛筆分給 2 個小朋友，每人恰好得 3 枝，則共有_____種分法。
 (2) 將 6 枝完全相同的鉛筆分給 8 個小朋友，每人至多得 1 枝，則共有_____種分法。

解 (1) $C_3^6 \times C_3^3 = 20$ (種)

- (2) 從 8 個小朋友選 6 個，1 人 1 枝

$$\therefore C_6^8 = 28 \text{ (種)}$$

8. 甲、乙、丙、丁、戊等 5 人排成一列，試求：

- (1) 甲必排首位 (第一個位置)，共有_____種排法。
 (2) 甲不排首位且丁不排第三個位置，共有_____種排法。

解 (1) 甲□□□□

$$P_4^4 = 4! = 24 \text{ (種)}$$

- (2) 甲□□□□ : $4! = 24$

$$\square\square\square\square : 4! = 24$$

$$\text{甲}\square\square\square : 3! = 6$$

⇒ 甲排首位或丁排第三位有 $24 + 24 - 6 = 42$ 種排法

∴ 甲不排首位且丁不排第三位

$$= (\text{全部排列}) - (\text{甲排首位或丁排第三位})$$

$$= 5! - 42 = 120 - 42 = 78 \text{ (種)}$$

9. 桌上有 5 瓶不同的酒，小華取出 3 個相異的小酒杯倒酒，假設每個杯子只倒入一種酒，並且 5 瓶酒的容量非常充足，試求：

(1) 每杯倒入不一樣的酒，共有_____種方法。

(2) 每杯倒入相同的酒，共有_____種方法。

解 (1) $P_3^5 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (種)

(2) 共有 5 瓶不同的酒

$\therefore$ 有 5 種方法

10. 已知樣本空間 S ，事件 A 、 B ，且 $P(A' \cap B') = \frac{1}{3}$ ， $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ ， $P(B) = \frac{1}{3}$ ，則：

(1) $P(A \cup B) =$ _____。

(2) $P(A) =$ _____。

解

(1) $\because P(A' \cap B') = P(A \cup B)' = \frac{1}{3}$

$\therefore P(A \cup B) = 1 - P(A \cup B)'$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

(2) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = P(A) + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$$

$$\therefore P(A) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

四、計算題(每題 10 分, 共 20 分)

11. 某校開設 6 門選修科目, 提供高二分群跨班選修。因為只安排一個學期的授課內容, 所以規定每人必須在上、下學期分別選修一門不同的科目, 以免重複。同時, 由於選修科目有人數限制, 而且都要開課, 每名學生須在選課單上依序填寫最希望選修的 3 種科目, 以便調整。試問:

- (1) 上學期全體高二學生最多有幾種不同的選課順序?(5 分)
- (2) 兩個學期下來, 全體高二學生最多有幾種不同的修課組合?(先甲科後乙科或先乙科後甲科, 視為相同)(5 分)

解 (1) $P_3^6 = 6 \times 5 \times 4 = 120$ (種)

(2) $C_2^6 = 15$ (種)

12. 某校數學科段考有兩種題型, 分別是單選題與多選題, 都是五個選項, 每題 5 分。試回答下列問題:

- (1) 單選題是指正確選項恰有一個, 為了消除猜題僥倖得分的因素, 命題老師規定答錯要倒扣。試以期望值為 0 的觀點, 計算答錯一題應該倒扣幾分?(5 分)
- (2) 多選題是指正確選項可能只有 1 個或 1 個以上, 試計算正確答案有幾種可能?(5 分)

解 (1) 5 個選項只有 1 個正確

故任意猜題答對機率為 $\frac{1}{5}$, 答錯機率為 $\frac{4}{5}$

設答錯得 x 分

$$5 \times \frac{1}{5} + \frac{4}{5}x = 0$$

$$\Rightarrow \frac{4}{5}x = -1 \quad \therefore x = -\frac{5}{4} = -1.25$$

故應倒扣 1.25 分

- (2) 每個選項有「選」與「不選」的可能

由乘法原理得 $2^5 = 32$

但不可能有「5 個都不選」的情形

$\therefore$ 有 $32 - 1 = 31$ 種