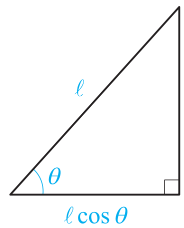
4-3 面積公式與正餘弦定理

重點整理

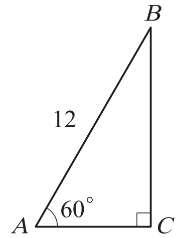
一、正射影長

如圖(一)，長度為 ℓ 的線段與水平線夾角為 θ，則此線段在水平線的投影長為 $\ell\cos\theta$。

例：如圖(二)，$\overline{AC}=12\cos 60^\circ=12\times\dfrac{1}{2}=6$。



圖(一)



圖(二)

二、面積公式

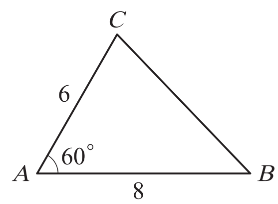
1. 已知兩邊邊長及其夾角的面積公式：

$\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長分別為 a、b、c，

則$\triangle ABC$ 面積 $=\dfrac{1}{2}bc\sin A=\dfrac{1}{2}ca\sin B=\dfrac{1}{2}ab\sin C$。

例：如右圖，$\angle A=60^\circ$，$b=6$，$c=8$，則

$$\triangle ABC\text{ 面積}=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}\times 6\times 8\times\sin 60^\circ=12\sqrt{3}\text{。}$$



2. 海龍公式：

若$\triangle ABC$ 的三邊長分別為 a，b，c，則$\triangle ABC$ 的面積為

$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$，其中 $s=\dfrac{a+b+c}{2}$ 為$\triangle ABC$ 周長的一半。

例：已知$\triangle ABC$ 的三邊長分別為 5，6，7，則 $s=\dfrac{5+6+7}{2}=9$

故$\triangle ABC$ 的面積為 $\sqrt{9(9-5)(9-6)(9-7)}=\sqrt{9\times4\times3\times2}=6\sqrt{6}$。

三、正弦定理

$\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長分別為 a、b、c，且$\triangle ABC$ 的外接圓半徑為 R，

則 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$。

補充：實際解題時，有時轉換成 $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C$。

四、餘弦定理

$\triangle ABC$ 中，$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 的對邊長分別為 a、b、c，則

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$，

$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$，

$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$。

補充：已知三邊長求夾角時，可以轉換成

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\text{，}\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}\text{，}\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\text{。}$$

補充：$\angle A$ 為銳角時，$a^2<b^2+c^2$。

$\angle A$ 為鈍角時，$a^2>b^2+c^2$。

反之亦然。

4-3

翰林用心教師用精益求精

例題 1　正射影長與三角形面積公式

直角三角形 ABC 中，$\angle A=60^\circ$，$\angle C=90^\circ$，$\overline{AB}=8$。試求：

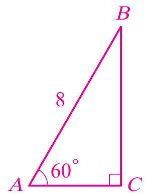
(1) $\overline{AC}$。（5 分）

(2) $\triangle ABC$ 面積。（5 分）

解 (1) $\overline{AC}=8\cos A$

$=8\times\cos 60^\circ$

$=8\times\dfrac{1}{2}=4$



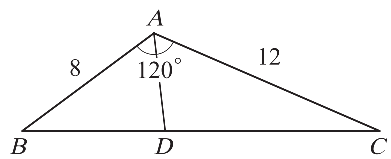
(2) $\triangle ABC$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\times 8\times 4\times\sin 60^\circ$

$=\dfrac{1}{2}\times 8\times 4\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$=8\sqrt{3}$

例題 2　三角形面積公式

如右圖，$\triangle ABC$ 中，已知 $\angle A=120^\circ$，$\overline{AB}=8$，$\overline{AC}=12$，$\angle A$ 的角平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點。試求：



(1) $\triangle ABC$ 面積。（5 分）

(2) $\overline{AD}$。（5 分）

解

(1) $\triangle ABC$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin A$

$=\dfrac{1}{2}\times 8\times 12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$

(2) 設角平分線段長為 x

$\triangle ABD$ 面積 $+\triangle ACD$ 面積 $=\triangle ABC$ 面積

$\angle BAD=\angle CAD=60^\circ$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}\times 8\times x\times\sin 60^\circ+\dfrac{1}{2}\times 12\times x\times\sin 60^\circ=24\sqrt{3}$

$\Rightarrow 4x\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}+6x\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=24\sqrt{3}$

$\Rightarrow 5\sqrt{3}x=24\sqrt{3}\Rightarrow x=\dfrac{24}{5}$

$\therefore \overline{AD}=\dfrac{24}{5}$

例題 3　正弦定理(一)

已知△ABC 中，$\angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$，試求：

(1) 三內角$\angle A$、$\angle B$、$\angle C$。（6 分）

(2) 三邊邊長比 $\overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB}$。（4 分）

解 (1) $\because \angle A:\angle B:\angle C=1:2:3$

$$\therefore \angle A=180^\circ\times\frac{1}{6}=30^\circ，\angle B=180^\circ\times\frac{2}{6}=60^\circ，\angle C=180^\circ\times\frac{3}{6}=90^\circ$$

(2) 由正弦定理知

$$\begin{aligned}\overline{BC}:\overline{CA}:\overline{AB}&=\sin A:\sin B:\sin C\\&=\sin 30^\circ:\sin 60^\circ:\sin 90^\circ\\&=\frac{1}{2}:\frac{\sqrt{3}}{2}:1\\&=1:\sqrt{3}:2\end{aligned}$$

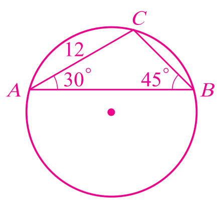
例題 4　正弦定理(二)

△ABC 中，$\angle A=30^\circ$，$\angle B=45^\circ$，$\overline{AC}=12$。試求：

(1) $\overline{BC}$。（5 分）

(2) △ABC 的外接圓面積。（5 分）

解 (1) 由正弦定理知 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}$



即 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin 30^\circ}=\dfrac{12}{\sin 45^\circ}\Rightarrow\dfrac{\overline{BC}}{\frac{1}{2}}=\dfrac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$

$\therefore \overline{BC}=6\sqrt{2}$

(2) 設外接圓半徑為 R

由正弦定理知 $\dfrac{\overline{AC}}{\sin B}=2R$

即 $\dfrac{12}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=2R$

得 $R=6\sqrt{2}$

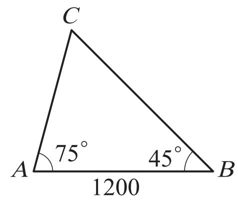
故外接圓面積為 72π

4-3

翰林用心 教師用 精益求精

例題 5　測量問題（正弦定理的應用）

如右圖，A、B 兩地距離 1200 公尺，自 A 地測得 $\angle BAC=75^\circ$，自 B 地測得 $\angle ABC=45^\circ$。試求 A、C 兩地之距離 $\overline{AC}$。（10 分）



解　$\angle C=180^\circ-(75^\circ+45^\circ)=60^\circ$

由正弦定理知

$$\frac{\overline{AC}}{\sin 45^\circ}=\frac{1200}{\sin 60^\circ}$$

$$\Rightarrow \overline{AC}=\frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\times 1200=\frac{1200\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=400\sqrt{6}\text{（公尺）}$$

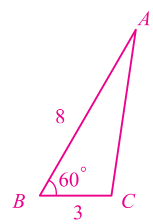
例題 6　餘弦定理基本應用

$\triangle ABC$ 中，已知 $\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=3$，$\angle B=60^\circ$，試求：

(1) $\overline{AC}$。（5 分）

(2) $\cos A$。（5 分）

解 (1) 由餘弦定理知



$$\overline{AC}^2=3^2+8^2-2\times 3\times 8\times\cos 60^\circ$$
$$=9+64-24=49$$
$$\therefore \overline{AC}=7$$

(2) 由餘弦定理知

$$\cos A=\frac{7^2+8^2-3^2}{2\times 7\times 8}=\frac{49+64-9}{2\times 7\times 8}=\frac{13}{14}$$

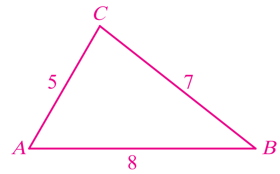
例題 7　餘弦定理與海龍公式的應用

已知△ABC 中，三邊邊長分別為 $\overline{AB}=8$，$\overline{BC}=7$，$\overline{CA}=5$，試求：

(1) $\angle A$。(5 分)

(2) △ABC 的面積。(5 分)

解 (1) 由餘弦定理知



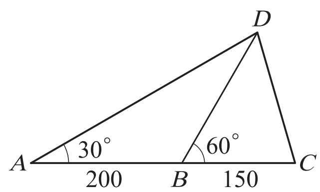
$$\cos A=\frac{5^2+8^2-7^2}{2\times5\times8}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \angle A=60^\circ$

(2) $s=\frac{1}{2}(8+7+5)=10$，由海龍公式

△ABC 面積為 $\sqrt{10(10-8)(10-7)(10-5)}=\sqrt{10\times2\times3\times5}=10\sqrt{3}$

例題 8　測量問題 (餘弦定理)

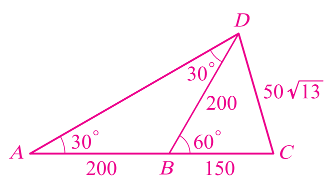


如右圖，A、B、C 為東西向筆直公路上的三點，D 是公路北側地面一點。小明在 A 點測得 $\angle DAC=30^\circ$ 後，沿著公路走 200 公尺到 B 點，測得 $\angle DBC=60^\circ$，再走 150 公尺到 C 點，試求：

(1) C 點到 D 點之距離 $\overline{CD}$。(5 分)

(2) $\cos\angle BCD$。(5 分)

解 (1) 如右圖，$\angle ADB=60^\circ-30^\circ=30^\circ$



$\therefore$ △BAD 是等腰三角形

$\Rightarrow \overline{BD}=\overline{BA}=200$

△BCD 中，由餘弦定理知

$$\begin{aligned}\overline{CD}^2&=200^2+150^2-2\times200\times150\times\cos60^\circ\\&=62500-30000\\&=32500\end{aligned}$$

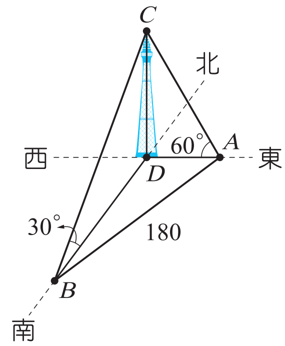
$\therefore \overline{CD}=50\sqrt{13}$ (公尺)(約 180.3 公尺)

(2) 由餘弦定理知

$$\cos\angle BCD=\frac{150^2+(50\sqrt{13})^2-200^2}{2\times150\times50\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{13}}=\frac{\sqrt{13}}{13}$$

例題 9　立體測量(一)

如右圖，在塔的正東方一點 A 測得塔頂仰角 60°，在塔的正南方一點 B 測得塔頂仰角 30°。已知 A 點與 B 點距離 180 公尺，試求塔高 $\overline{CD}$。（10 分）



解　由題意知，

地面上 A、B、D 點與塔頂 C 點都是長方體的頂點

設塔高 $\overline{CD}=h$

在直角三角形 ACD 中，

$\tan 60^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\sqrt{3}$　$\therefore \overline{AD}=\dfrac{h}{\sqrt{3}}$

在直角三角形 BCD 中，

$\tan 30^\circ=\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$　$\therefore \overline{BD}=\sqrt{3}h$

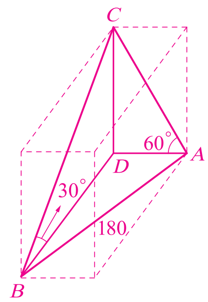
在直角三角形 ABD 中，

$\overline{AD}^2+\overline{BD}^2=\overline{AB}^2$

故得 $\dfrac{h^2}{3}+3h^2=180^2$，$\dfrac{10}{3}h^2=32400$

$\Rightarrow h^2=9720 \Rightarrow h=18\sqrt{30}$

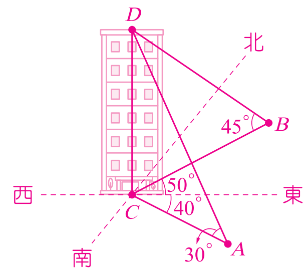
故塔高 $\overline{CD}=18\sqrt{30}$（公尺）（約 98.59 公尺）



4-3

例題 10 立體測量(二)

已知某大樓高 120 公尺，今自樓頂測得東 40° 南地面 A 點的俯角為 30°，又測得東 50° 北地面 B 點的俯角為 45°，試求 A、B 兩點距離。（10 分）



解 如右圖，$\angle BCA = 90^\circ$

在$\triangle ACD$中，

$\tan 30^\circ = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{AC}}$ $\quad \therefore \overline{AC} = \dfrac{120}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = 120\sqrt{3}$

在$\triangle BCD$中，

$\tan 45^\circ = \dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}}$ $\quad \therefore \overline{BC} = 120$

由餘弦定理

$\overline{AB}^2 = (120\sqrt{3})^2 + 120^2 - 2 \times 120\sqrt{3} \times 120 \times \cos 90^\circ$

$= 57600$

$\overline{AB} = 240$

$\therefore A$、B 相距約 240 公尺

4-3

翰林用心教師用精益求精