

1-1 數 列

重點整理

一、數列的定義

1. 數列的定義：

將一些數字依序排成一列，就成為一個數列。

(1) 有限數列：

只有有限多項的數列，形如 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ 。

例：3, 2, 0, 8, 4。

(2) 無窮數列：

有無窮多項的數列，形如 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 。

例：1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, $\dots$ 。

通常用 $\langle a_n \rangle$ 表示數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ ，其中 a_1 稱為第一項（首項）， a_n 稱為第 n 項（一般項）。

2. 等差數列：

(1) 一個數列若相鄰兩項的後項減前項所得的差是定值，就稱為等差數列，而這個定值稱為公差。

例：觀察數列 1, 4, 7, 10, 13, $\dots$ ，顯然 $4 - 1 = 7 - 4 = \dots = 3$ ，此為等差數列，公差為 3。

(2) 等差數列的一般項：

若等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項為 a_1 ，公差為 d ，則其一般項為 $a_n = a_1 + (n - 1)d$ 。

3. 等比數列：

(1) 一個數列若相鄰兩項的後項除以前項所得的比值是定值，就稱為等比數列，而這個定值稱為公比。

例：觀察數列 4, 8, 16, 32, 64, $\dots$ ，顯然 $\frac{8}{4} = \frac{16}{8} = \dots = 2$ ，

此為等比數列，公比為 2。

(2) 等比數列的一般項：

若等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項為 a_1 ($a_1 \neq 0$)，公比為 r ($r \neq 0$)，則其一般項為 $a_n = a_1 r^{n-1}$ 。

二、遞迴數列

1. 遞迴數列的定義：

一數列的後項可以由前面的項，根據某規則（稱為遞迴關係）而推得，稱為遞迴數列，一開始給定的項稱為初始值。

2. 等差數列的遞迴定義式：

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + d, n \geq 2 \end{cases}$$
，其中 a 是首項， d 是公差。

例：等差數列 10, 15, 20, 25, 30, ……，

$$\text{遞迴定義式為 } \begin{cases} a_1 = 10 \\ a_n = a_{n-1} + 5, n \geq 2 \end{cases}。$$

3. 等比數列的遞迴定義式：

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = ra_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}, \text{ 其中 } a \text{ 是首項, } r \text{ 是公比。}$$

例：等比數列 2, 6, 18, 54, 162, ……，

$$\text{遞迴定義式為 } \begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = 3a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}。$$

三、數學歸納法

一個與正整數 n 有關的敘述同時滿足下列兩個條件：

1. 當 $n = 1$ 時，敘述成立。
 2. 設 $n = k$ 時敘述成立，由此可以推得 $n = k + 1$ 時敘述也成立。
- 則此敘述對所有正整數 n 都成立。

例題 1 由數列定義寫出前五項

寫出下列各數列的前五項：

(1) 數列 $\langle a_n \rangle$, $a_n = -3 + 2n$ 。(5 分)

(2) 數列 $\langle n^2 + 2 \rangle$ 。(5 分)

解 (1) 將 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 分別代入 $a_n = -3 + 2n$

得前五項為 $-1, 1, 3, 5, 7$

(2) 將 $n = 1, 2, 3, 4, 5$ 分別代入 $n^2 + 2$

得前五項為 $3, 6, 11, 18, 27$

例題 2 寫出等差或等比數列的前五項

寫出下列各數列的前五項：

(1) 等差數列 $\langle a_n \rangle$ ，首項 $a_1 = 10$ ，公差 $d = 3$ 。(5 分)

(2) 等比數列 $\langle b_n \rangle$ ，首項 $b_1 = 3$ ，公比 $r = 2$ 。(5 分)

解 (1) 等差數列首項 $a_1 = 10$ ，公差 $d = 3$

$$\therefore a_2 = 10 + 3 = 13$$

$$a_3 = 13 + 3 = 16$$

$$a_4 = 16 + 3 = 19$$

$$a_5 = 19 + 3 = 22$$

故前五項為 10, 13, 16, 19, 22

(2) 等比數列首項 $b_1 = 3$ ，公比 $r = 2$

$$\therefore b_2 = 3 \times 2 = 6$$

$$b_3 = 6 \times 2 = 12$$

$$b_4 = 12 \times 2 = 24$$

$$b_5 = 24 \times 2 = 48$$

故前五項為 3, 6, 12, 24, 48

例題 3 由數列的已知項求首項、公差與一般項

(1) 等差數列 $\langle a_n \rangle$ 中， $a_5 = 11$ ， $a_8 = 29$ 。試求：

① 首項 a_1 。(2 分)

② 公差 d 。(1 分)

③ 一般項 a_n 。(2 分)

(2) 等比數列 $\langle b_n \rangle$ 中， $b_2 = 4$ ， $b_5 = 32$ 。試求：

① 首項 b_1 。(2 分)

② 公比 r 。(1 分)

③ 一般項 b_n 。(2 分)

解 (1) 已知 $a_5 = 11$ ， $a_8 = 29$

$$\text{故 } \begin{cases} a_1 + 4d = 11 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ a_1 + 7d = 29 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} - \textcircled{1} \text{ 得 } 3d = 18 \Rightarrow d = 6 \text{ 代入 } \textcircled{1}, \text{ 得 } a_1 = 11 - 24 = -13$$

$$\therefore a_n = -13 + 6(n-1) = 6n - 19$$

故得首項 $a_1 = -13$ ，公差 $d = 6$ ，一般項 $a_n = 6n - 19$

(2) 已知 $b_2 = 4$ ， $b_5 = 32$

$$\text{故 } \begin{cases} b_1 r = 4 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{1} \\ b_1 r^4 = 32 & \cdots \cdots \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\frac{\textcircled{2}}{\textcircled{1}} \text{ 得 } r^3 = 8 \Rightarrow r = 2, \text{ 代入 } \textcircled{1}, \text{ 得 } b_1 = \frac{4}{2} = 2$$

$$\therefore b_n = b_1 r^{n-1} = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

故得首項 $b_1 = 2$ ，公比 $r = 2$ ，一般項 $b_n = 2^n$

例題 4 將等差數列寫成遞迴式

將下列等差數列改寫為遞迴定義式：

(1) 等差數列 $\langle a_n \rangle$ ，首項 $a_1 = 20$ ，公差 $d = -3$ 。(5 分)

(2) 等差數列 $\langle b_n \rangle = \langle 5, 11, 17, 23, \dots \rangle$ 。(5 分)

解

(1)
$$\begin{cases} a_1 = 20 \\ a_n = a_{n-1} - 3, n \geq 2 \end{cases}$$

(2) 首項 $b_1 = 5$
公差 $d = 11 - 5 = 6$
故得
$$\begin{cases} b_1 = 5 \\ b_n = b_{n-1} + 6, n \geq 2 \end{cases}$$

例題 5 將等比數列寫成遞迴式

將下列等比數列改寫為遞迴定義式：

(1) 等比數列 $\langle a_n \rangle$ ，首項 $a_1 = -2$ ，公比 $r = 3$ 。(5 分)

(2) 等比數列 $\langle b_n \rangle = \langle 2, -4, 8, -16, \dots \rangle$ 。(5 分)

解

(1)
$$\begin{cases} a_1 = -2 \\ a_n = 3a_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

(2) 首項 $b_1 = 2$
公比 $r = \frac{b_2}{b_1} = \frac{-4}{2} = -2$
故得
$$\begin{cases} b_1 = 2 \\ b_n = -2b_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$

例題 6 由遞迴式求數列的前五項

- (1) 數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴式 $\begin{cases} a_1 = 12 \\ a_n = 3a_{n-1} - 5, n \geq 2 \end{cases}$ ，試寫出此數列的前 5 項。(5 分)
- (2) 數列 $\langle b_n \rangle$ 滿足遞迴式 $\begin{cases} b_1 = \frac{1}{3} \\ b_n = \frac{1}{3 - b_{n-1}}, n \geq 2 \end{cases}$ ，試寫出此數列的前 5 項。(5 分)

解 (1) 由遞迴式得

$$a_1 = 12, a_2 = 3 \times 12 - 5 = 31, a_3 = 3 \times 31 - 5 = 88$$

$$a_4 = 3 \times 88 - 5 = 259, a_5 = 3 \times 259 - 5 = 772$$

故前 5 項為 12, 31, 88, 259, 772

(2) 由遞迴式得

$$b_1 = \frac{1}{3}$$

$$b_2 = \frac{1}{3 - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{8}{3}} = \frac{3}{8}$$

$$b_3 = \frac{1}{3 - \frac{3}{8}} = \frac{1}{\frac{21}{8}} = \frac{8}{21}$$

$$b_4 = \frac{1}{3 - \frac{8}{21}} = \frac{1}{\frac{55}{21}} = \frac{21}{55}$$

$$b_5 = \frac{1}{3 - \frac{21}{55}} = \frac{1}{\frac{144}{55}} = \frac{55}{144}$$

故前 5 項為 $\frac{1}{3}, \frac{3}{8}, \frac{8}{21}, \frac{21}{55}, \frac{55}{144}$

例題 7 觀察規律寫出數列的指定項

- (1) 數列 $\langle a_n \rangle = \langle 2, 8, 18, 32, 50, \dots \rangle$ ，試寫出此數列的第 10 項。(5 分)
 (2) 數列 $\langle b_n \rangle = \langle 1, 5, 6, 11, 17, 28, \dots \rangle$ ，試寫出此數列的第 10 項。(5 分)

解 (1) 觀察此數列的規律性

$$\begin{aligned} a_1 &= 2 = 2 \times 1 = 2 \times 1^2, & a_2 &= 8 = 2 \times 4 = 2 \times 2^2, & a_3 &= 18 = 2 \times 9 = 2 \times 3^2 \\ a_4 &= 32 = 2 \times 16 = 2 \times 4^2, & a_5 &= 50 = 2 \times 25 = 2 \times 5^2 \\ \text{故第 10 項為 } a_{10} &= 2 \times 10^2 = 200 \end{aligned}$$

(2) 觀察此數列的規律性

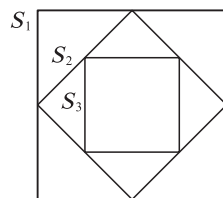
$$\begin{aligned} b_1 &= 1, & b_2 &= 5, & b_3 &= 6 = 1 + 5 = b_1 + b_2, & b_4 &= 11 = 5 + 6 = b_2 + b_3 \\ b_5 &= 17 = 6 + 11 = b_3 + b_4, & b_6 &= 28 = 11 + 17 = b_4 + b_5 \\ \text{故 } b_7 &= b_5 + b_6 = 17 + 28 = 45, & b_8 &= b_6 + b_7 = 28 + 45 = 73 \\ b_9 &= b_7 + b_8 = 45 + 73 = 118, & b_{10} &= b_8 + b_9 = 73 + 118 = 191 \end{aligned}$$

例題 8 寫出數列的遞迴式與一般項(觀察圖形)

- (1) 用牙籤拼成連續正方形如右圖，若依此規律，第 n 圖需要 a_n 枝牙籤，請寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴式。(5 分)



- (2) 如右圖，正方形 S_1 的邊長為 2，連接 S_1 四邊中點得正方形 S_2 ，依此規律得一系列正方形 $S_1, S_2, S_3, S_4, \dots$ 。設 b_n 表示 S_n 的邊長，請寫出數列 $\langle b_n \rangle$ 的遞迴式。(5 分)



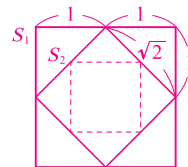
解 (1) 觀察圖形得

$$\begin{aligned} a_1 &= 4, & a_2 &= a_1 + 3, & a_3 &= a_2 + 3, & a_4 &= a_3 + 3 \\ \text{故得 } \langle a_n \rangle \text{ 的遞迴式為 } & \begin{cases} a_1 = 4 \\ a_n = a_{n-1} + 3, n \geq 2 \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 由已知得 $b_1 = 2$

$$\begin{aligned} \text{如右圖, } b_2 &= \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\ \text{同理, } b_3 &= \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1 \\ \frac{b_3}{b_2} &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \frac{b_2}{b_1} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$\text{故得 } \langle b_n \rangle \text{ 的遞迴式為 } \begin{cases} b_1 = 2 \\ b_n = \frac{\sqrt{2}}{2} b_{n-1}, n \geq 2 \end{cases}$$



例題 9 由數列的遞迴式推測一般項並用數學歸納法證明

設數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足遞迴式
$$\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_n = a_{n-1} + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)}, n \geq 2 \end{cases}$$
，試觀察此數列前幾

項，推測其一般項 a_n 的形式，並用數學歸納法證明。(10 分)

解 $n=1$ 時， $a_1 = \frac{1}{3}$

$$n=2 \text{ 時， } a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3 \times 5} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5}$$

$$n=3 \text{ 時， } a_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{5 \times 7} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$$

$$n=4 \text{ 時， } a_4 = \frac{3}{7} + \frac{1}{7 \times 9} = \frac{28}{63} = \frac{4}{9}$$

$$n=5 \text{ 時， } a_5 = \frac{4}{9} + \frac{1}{9 \times 11} = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}$$

觀察前五項，推測此數列一般項為 $a_n = \frac{n}{2n+1}$ ，底下用數學歸納法證明

(1) 當 $n=1$ 時， $a_1 = \frac{1}{2 \times 1 + 1} = \frac{1}{3}$

(2) 設 $n=k$ 時，原式成立，即 $a_k = \frac{k}{2k+1}$ ，

則 $n=k+1$ 時，

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{[2(k+1)-1][2(k+1)+1]} = \frac{k}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)} \\ &= \frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{k+1}{2k+3} = \frac{k+1}{2(k+1)+1} \end{aligned}$$

所以 $n=k+1$ 時，推測也成立

故由數學歸納法可知，此數列 $a_n = \frac{n}{2n+1}$ ，對所有正整數 n 都成立

例題 10 數學歸納法(正整數的恆等式)

利用數學歸納法證明： $1+3+5+7+\cdots+(2n-1)=n^2$ ，對所有正整數 n 均成立。(10 分)

證 (1) 當 $n=1$ 時， $2 \times 1 - 1 = 1^2$ ，原式成立

(2) 設 $n=k$ 時，原式成立，即 $1+3+5+7+\cdots+(2k-1)=k^2$

則 $n=k+1$ 時，

$$1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]$$

$$=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

所以 $n=k+1$ 時，原式也成立

故由數學歸納法可知，原式對所有正整數 n 均成立