

3-1 計數原理

重點整理

一、邏輯與集合

1. 邏輯：

在數學上，一個可以判斷「對」或「錯」（「成立」或「不成立」）的句子，稱為敘述（statement）或命題（proposition）。

例： $5 > 3$ 是對的敘述。

例： $6 \leq 2$ 是錯的敘述。

(1) 否定敘述：

與一個敘述對錯相反的敘述，稱為其否定敘述。敘述 A 的否定敘述記為 $\sim A$ （讀作非 A ）。

例： $5 > 3$ 的否定敘述為 $5 \leq 3$ 。

例： $6 \leq 2$ 的否定敘述為 $6 > 2$ 。

(2) 用「且」、「或」連結多個敘述：

兩個以上的單一敘述可以用「且」、「或」連結。

例： $5 > 3$ 或 $7 < 2$ 。

例： $6 \leq 2$ 且 $0 > -5$ 。

(3) 設 A, B 為兩敘述，則「 A 或 B 」的否定敘述為「 $\sim A$ 且 $\sim B$ 」；「 A 且 B 」的否定敘述為「 $\sim A$ 或 $\sim B$ 」。

例：「 $x = 3$ 或 $x = 2$ 」的否定敘述為「 $x \neq 3$ 且 $x \neq 2$ 」。

例：「 $x > 5$ 且 $x < 7$ 」的否定敘述為「 $x \leq 5$ 或 $x \geq 7$ 」。

(4) 充分條件與必要條件：

$P \Rightarrow Q$ ：讀為「若 P 則 Q 」，表示敘述 P 可以推導到敘述 Q 。

P 是 Q 的充分條件， Q 是 P 的必要條件。

例： $x = 3 \Rightarrow x^2 = 9$ 之中， $x = 3$ 是 $x^2 = 9$ 的充分條件， $x^2 = 9$ 是 $x = 3$ 的必要條件。

(5) 充要條件：

$P \Leftrightarrow Q$ ：敘述 P 可以推導到敘述 Q ，敘述 Q 也可以推導到敘述 P ，則稱 P 與 Q 互為充要條件（充分且必要條件）。

例： $x = 3$ 或 $x = -3 \Leftrightarrow x^2 = 9$ ，「 $x = 3$ 或 $x = -3$ 」與「 $x^2 = 9$ 」互為充要條件。

2. 集合：

直觀來說，將一群事物放在一起就是一個集合。

(1) 集合的基本概念與名詞：

以 a, b, c, d, e 形成集合 A 為例，說明如下。

集合： $A = \{a, b, c, d, e\}$

元素： a, b, c, d, e 都是 A 的元素。

屬於： a 是集合 A 的元素，稱 a 屬於 A ，記為 $a \in A$ 。

不屬於：不在集合 A 裡的元素都不屬於 A 。例如， f 不屬於 A ，記為 $f \notin A$ 。

集合相等：集合 A 與集合 B 的元素完全相同時，稱此兩集合相等，記為 $A = B$ 。本例中，若令 $B = \{d, e, a, b, c\}$ ，顯然 $A = B$ 。

(2) 集合的表示法：

① 列舉法：將集合的所有元素列舉在一個大括號裡面。

例： $A = \{a, b, c, d, e\}$ 。

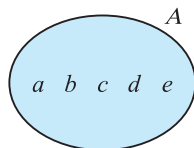
② 描述法：在大括號裡用一個字母代表元素，並描述元素的性質。

例： $B = \{x \mid x \text{ 是小於 } 8 \text{ 的正整數}\}$ 。

(用列舉法可表為 $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$)

(3) 文氏圖：將平面的一個區域圍起來以表示集合。

例：以文氏圖表示集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$ ，如右圖。



(4) 元素個數：若集合 S 的元素個數有限，則以 $n(S)$ 或 $|S|$ 表示其元素個數。

例： $A = \{5, 10, 15, 20\}$ ， $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ 。

則 $n(A) = 4$ ， $n(B) = 7$ 。(或記為 $|A| = 4$ ， $|B| = 7$)

(5) 有限集合：若集合的元素個數有限，稱為有限集合。

例： $A = \{1, 3, 4\}$ ， $B = \{x \mid x > 0 \text{ 且 } x \text{ 是偶數}\}$ 。

則 A 是有限集合， B 不是有限集合。

(6) 子集：若 A 的元素都是 B 的元素，稱 A 是 B 的子集(部分集合)。

例： $A = \{1, 3, 4\}$ ， $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 。

我們稱 A 是 B 的子集，記為 $A \subseteq B$ (讀為 A 包含於 B)；或 $B \supseteq A$ (讀為 B 包含 A)。

(7) 空集合：不含任何元素的集合，以 $\{\}$ 或 $\emptyset$ 表示。

規定：空集合是任何集合的子集。例如， $\emptyset$ 是 $A = \{1, 3, 4\}$ 的子集。

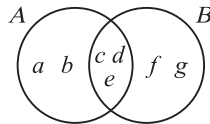
3. 集合的運算：

(1) 聯集與交集：

① 聯集：兩個集合所有元素所成的集合， $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$ 。

例： $A = \{a, b, c, d, e\}$ ， $B = \{c, d, e, f, g\}$ ，

則 $A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ 。



② 交集：兩個集合共同元素所成的集合，

$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$ 。

例： $A = \{a, b, c, d, e\}$ ， $B = \{c, d, e, f, g\}$ ，則 $A \cap B = \{c, d, e\}$ 。

(2) 差集與餘集：

① 差集： $A - B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$ ，在 A 中但不在 B 中的元素所成的集合。
(從 A 中刪去 A 、 B 都有的元素)

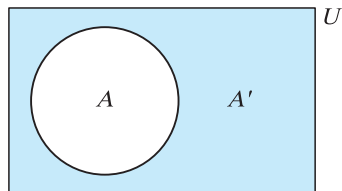
例： $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ， $B = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ，

則 $A - B = \{1, 3, 5\}$ 。

② 宇集：討論集合時所預設的最大集合，所有集合都是它的部分集合。

- ③ 餘集：宇集與這個集合的差集，也就是不在這個集合內的所有元素所成的集合。

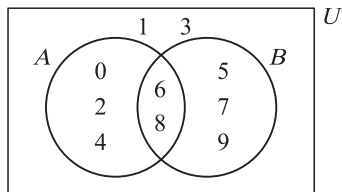
例：宇集 $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ， $A=\{0, 2, 4, 6, 8\}$ ，
則 A 的餘集 $A'=\{1, 3, 5, 7, 9\}$ 。



(3) 笛摩根定律：

- ① $(A \cup B)' = A' \cap B'$ 。(兩個集合聯集後取餘集，等於這兩個集合先取餘集再交集)
② $(A \cap B)' = A' \cup B'$ 。(兩個集合交集後取餘集，等於這兩個集合先取餘集再聯集)

例：宇集 $U=\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ，
 $A=\{0, 2, 4, 6, 8\}$ ， $B=\{5, 6, 7, 8, 9\}$



$$(1) A \cup B = \{0, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

$$\therefore (A \cup B)' = \{1, 3\}$$

$$A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B' = \{0, 1, 2, 3, 4\} \quad \therefore A' \cap B' = \{1, 3\}$$

由上面討論得 $(A \cup B)' = A' \cap B'$

$$(2) A \cap B = \{6, 8\} \quad \therefore (A \cap B)' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

$$A' = \{1, 3, 5, 7, 9\}, B' = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\therefore A' \cup B' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 9\}$$

由上面討論得 $(A \cap B)' = A' \cup B'$

二、基本計數原理

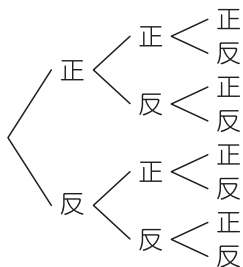
有限集合元素個數的基本計數方法如下：

1. 窮舉法與樹狀圖：

窮舉法：將所有可能的結果一一列舉出來。

樹狀圖：有效且系統性地列出所有可能結果的方法，圖形的發展有如樹枝一般。

例：擲一枚硬幣三次，有幾種可能的結果？



故有 8 種結果

2. 加法原理：

將完成一件工作的方法分成 k 類(彼此不重複)，各有 $n_1, n_2, \dots, n_k$ 種方法，再將這些方法數相加，則完成這件工作的方法共有 $n_1 + n_2 + \dots + n_k$ 種。

例：合作社熱食部有 3 種湯麵、2 種乾麵、5 種快餐，若選一種當午餐，試問有幾種方法？

因為這三類不重複，因此直接相加，即 $3 + 2 + 5 = 10$ (種)。

3. 乘法原理：

將完成一件工作的方法依序分成 k 個步驟，各有 $n_1, n_2, \dots, n_k$ 種方法，則完成這件工作共有 $n_1 \times n_2 \times \dots \times n_k$ 種方法。

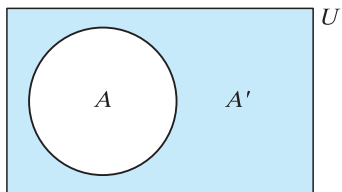
例：某人外出時有 5 件上衣、3 條長褲、2 雙鞋子可以選擇，試問此人外出有幾種穿著方式？

此人穿著分 3 個步驟，各有 5、3、2 種方法，故為 $5 \times 3 \times 2 = 30$ (種)。

4. 取捨原理：

(1) $n(A') = n(U) - n(A)$ 。

當 A' 的方法數不容易計算時，用全部方法數減去 A 的方法數即可。



例：擲一枚硬幣 3 次，依序記錄出現的正反面，試問有幾種正反面不完全相同的情形？

由乘法原理知共有 $2 \times 2 \times 2 = 8$ 種情形，故得 $n(U) = 8$ 。

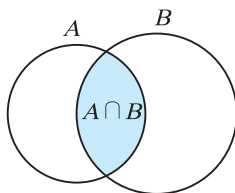
設 $n(A)$ 表正反面完全相同的情形， $n(A) = 2$ ，

即(正，正，正)、(反，反，反)共 2 種。

故得 $n(A') = n(U) - n(A) = 8 - 2 = 6$ 。

(2) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ 。

A 或 B 的方法數等於 A 、 B 的方法數相加，再減去 A 、 B 重複部分的方法數。



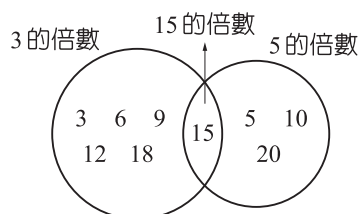
例：1 到 20 的正整數中，有幾個 3 或 5 的倍數？

1 到 20 的正整數中，3 的倍數有 6 個，5 的倍數有 4 個。

重複的部分就是 15 的倍數

(同時是 3 的倍數，也是 5 的倍數)，有 1 個。

所以 1 到 20 的正整數中，3 或 5 的倍數有 $6 + 4 - 1 = 9$ (個)。



(3) $n(A \cup B \cup C)$

$$= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)。$$

例題 1 邏輯

(1) 試寫出下列敘述的否定敘述。

- ① (擲一枚公正的骰子)點數小於 3。(2 分)
- ② (x 是實數) $x \geq 7$ 。(2 分)
- ③ (x 是實數) $3 < x < 8$ 。(2 分)

(2) 試判斷兩敘述「 $x = 5$ 」與「 $x^2 = 25$ 」的充分必要關係。

- ① 「 $x = 5$ 」是「 $x^2 = 25$ 」的_____條件。(2 分)
- ② 「 $x^2 = 25$ 」是「 $x = 5$ 」的_____條件。(2 分)

解 (1) ① 點數大於或等於 3

② $x < 7$

③ $x \leq 3$ 或 $x \geq 8$

(2) 「 $x = 5$ 」 $\Rightarrow$ 「 $x^2 = 25$ 」，即「 $x = 5$ 」可以推導到「 $x^2 = 25$ 」

但「 $x^2 = 25$ 」 $\Rightarrow$ 「 $x = 5$ 或 $x = -5$ 」，不能從「 $x^2 = 25$ 」推導到「 $x = 5$ 」

故知① 「 $x = 5$ 」是「 $x^2 = 25$ 」的充分條件

② 「 $x^2 = 25$ 」是「 $x = 5$ 」的必要條件

例題 2 集合基本概念

集合 $S = \{a, b, c\}$ ，試問：

(1) S 有多少個元素？(2 分)

(2) 請依元素個數依序列出 S 的所有子集合。(8 分)

解 (1) $n(S) = 3$

(2) 0 個： $\{ \}$

1 個： $\{a\}$ ， $\{b\}$ ， $\{c\}$

2 個： $\{a, b\}$ ， $\{a, c\}$ ， $\{b, c\}$

3 個： $\{a, b, c\}$

例題 3 聯集與交集

集合 $A = \{x \mid 1 \leq x < 9\}$ ， $B = \{x \mid 4 < x \leq 12\}$ ，試求：

(1) $A \cap B$ 。(5 分)

(2) $A \cup B$ 。(5 分)

解 (1) $A \cap B = \{x \mid 4 < x < 9\}$

(2) $A \cup B = \{x \mid 1 \leq x \leq 12\}$

例題 4 差集與餘集

假設字集 $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$,

$B = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, 試求：

- (1) A' 。(2 分) (2) B' 。(2 分) (3) $A - B$ 。(3 分) (4) $B - A$ 。(3 分)

解 (1) $A' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{1, 3, 5, 7, 9\}$

$$= \{0, 2, 4, 6, 8\}$$

$$(2) B' = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} - \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$= \{0, 1, 8, 9\}$$

$$(3) A - B = A - A \cap B$$

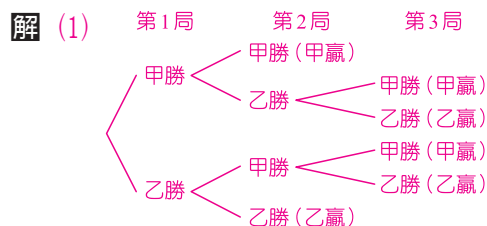
$$= \{1, 3, 5, 7, 9\} - \{3, 5, 7\} = \{1, 9\}$$

$$(4) B - A = B - B \cap A$$

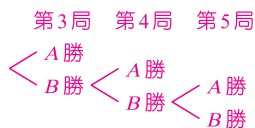
$$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{3, 5, 7\} = \{2, 4, 6\}$$

例題 5 窮舉法(樹狀圖)

- (1) 甲、乙兩人參加羽毛球比賽，規定 3 局 2 勝(沒有和局)者贏得比賽，請列出所有可能的比賽結果。(5 分)
- (2) A 、 B 兩校參加排球比賽，規定 5 局 3 勝者獲勝(沒有和局)，已知第一、二局都由 A 校獲勝，試問接下來的比賽過程有幾種勝負情形？(5 分)



- (2) 已知 A 校 2 勝，故所求為 A 校再勝 1 次或 B 校連勝 3 次



∴ 共 4 種

例題 6 加法原理

- (1) 翰翰旅行社推出 5 種日本深度遊，7 種歐洲浪漫行，3 種北美輕鬆遊，小雯打算利用暑假參加其中一種行程，共有幾種選擇？(5 分)
- (2) 小華有 3 雙運動鞋，2 雙皮鞋，4 雙布鞋，試問小華出門時可以有幾種鞋子的選擇？(5 分)

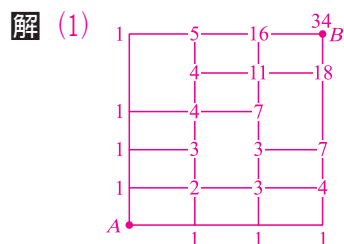
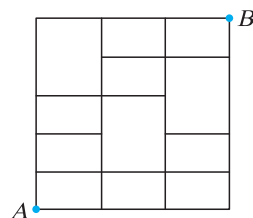
解 (1) $5 + 7 + 3 = 15$ (種)

$$(2) 3 + 2 + 4 = 9 \text{ (種)}$$

例題 7 加法原理與乘法原理

如右圖，從 A 點到 B 點依下列行進方式，各有幾種走法：

- (1) 只能向上或向右。(5 分)
- (2) 只能向上、向下或向右。(5 分)



∴有 34 種走法

- (2) ∴可以向上、向下、向右

∴可視為如下圖形



故共有 $5 \times 5 \times 5 = 125$ 種走法

例題 8 乘法原理

- (1) 翰翰旅行社推出 5 種日本深度遊，7 種歐洲浪漫行，3 種北美輕鬆遊，小慧打算就這三類行程各選一種行程參加，有幾種選擇？(5 分)
- (2) 小偉有 2 頂不同的帽子，6 件不同的上衣，3 條不同的長褲，假設帽子可戴上也可不戴，試求任意搭配最多有幾種穿著方式？(5 分)

解 (1) 各選一種行程

∴有 $5 \times 7 \times 3 = 105$ 種選擇

- (2) ∴帽子可戴可不戴

∴帽子有 3 種選擇

故 $3 \times 6 \times 3 = 54$ (種)

例題 9 取捨原理

高一某班 42 人的段考成績，英文與數學至少一科及格者有 36 人，英文及格者有 30 人，數學及格者有 26 人，試問：

- (1) 英文、數學都及格者有多少人？(3 分)
- (2) 英文、數學都不及格者有多少人？(3 分)
- (3) 英文及格但數學不及格者有多少人？(4 分)

解 設 U 、 E 、 M 分別代表全班、英文及格、數學及格的人所成的集合

由題意知 $n(U) = 42$ ， $n(E \cup M) = 36$ ， $n(E) = 30$ ， $n(M) = 26$

(1) 由取捨原理得

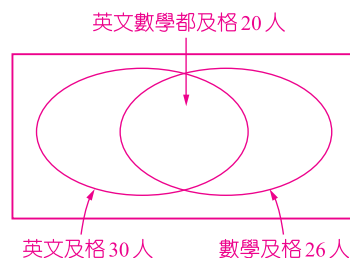
$$\begin{aligned} n(E \cup M) &= n(E) + n(M) - n(E \cap M) \\ \Rightarrow 36 &= 30 + 26 - n(E \cap M) \Rightarrow n(E \cap M) = 20 \\ \therefore \text{英文、數學都及格者有 } 20 \text{ 人} \end{aligned}$$

(2) $n(E' \cap M') = n(E \cup M)' = n(U) - n(E \cup M) = 42 - 36 = 6$
 $\therefore$ 英文、數學都不及格者有 6 人

(3) 作文氏圖，由(1)知 $n(E \cap M) = 20$ ，即英文數學都及格有 20 人

$$\text{所求為 } n(E) - n(E \cap M) = 30 - 20 = 10$$

故知英文及格但數學不及格者有 10 人



例題 10 乘法原理與取捨原理

用 0, 1, 2, 3, 4 排五位數，依下列規則，可以排幾個相異的五位數？

- (1) 數字可重複。(5 分)
- (2) 數字不可重複。(5 分)

解 (1) 數字可重複

□□□□□

排五位數則最高位不可排 0

$$\therefore 4 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 2500 \text{ (種)}$$

(2) 數字不可重複，

$$\text{則有 } 4 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 96 \text{ (種)}$$

〈另解〉(取捨原理)

(1) □□□□□

先任意排，得 $5 \times 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 3125$
但 0 不可置最高位

$$0□□□□ : 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$$

$$\therefore 3125 - 625 = 2500 \text{ (種)}$$

(2) □□□□□

先任意排，得 $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$
但 0 不可置最高位

$$0□□□□ : 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

$$\therefore 120 - 24 = 96 \text{ (種)}$$