3-3 組　合

重點整理

一、組合

1. 組合公式：
   從 n 個不同物品挑出 k 個物品的組合數。
   （不用排列，也就是不考慮物品順序的意思）

   $$C^n_k = \frac{n!}{k!(n-k)!}，0 \le k \le n。$$

   例：水果攤有 6 種水果，媽媽打算買 2 種，選擇的方法共有 $C^6_2 = 15$ 種。

2. C^n_k 的性質：
   (1) $C^n_0 = 1$，$C^n_n = 1$。
   從 n 個選 0 個，只有 1 種選法，就是「不選」。
   從 n 個選 n 個，只有 1 種選法，就是「全選」。
   (2) $C^n_k = C^n_{n-k}$。（$0 \le k \le n$）
   從 n 個選 k 個，剩下 $n-k$ 個。因此「選 k 個」與「選 $n-k$ 個」方法數相同，故知 $C^n_k = C^n_{n-k}$。
   例：從$\{a，b，c，d，e\}$選出 2 個字母有 C^5_2 種方法，但是選出 2 個就剩 3 個，例如，選 a，b 剩下 c，d，e；選 a，c 剩 b，d，e。
   選 2 個的方法與選 3 個的方法相對應，所以它們的方法數也會相等，也就是 $C^5_2 = C^5_3$。

二、二項式定理

若 n 為非負整數，將$(x+y)^n$ 展開，它的每一項都是 n 次，係數都可以用 C^n_k 的形式表示。$(x+y)^n = C^n_0x^ny^0 + C^n_1x^{n-1}y^1 + \cdots\cdots + C^n_{n-1}x^1y^{n-1} + C^n_nx^0y^n$，其中的一般項為 $C^n_kx^{n-k}y^k$，$k = 0$，1，2，……，n。式中的 C^n_k 稱為二項式係數。

例：$(x+y)^3 = C^3_0x^3y^0 + C^3_1x^2y^1 + C^3_2x^1y^2 + C^3_3x^0y^3 = C^3_0x^3 + C^3_1x^2y + C^3_2xy^2 + C^3_3y^3$。

三、巴斯卡三角形

利用二項式定理展開$(x+y)^n$，其中 $n = 0$，1，2，3，……，分別得到不同次方的二項式係數 C^n_k。

將 C^n_k 排成三角形，稱為巴斯卡三角形（或楊輝三角形）。

$$\begin{array}{ccccccccc}
&&&&C^0_0&&&&\\
&&&C^1_0&&C^1_1&&&\\
&&C^2_0&&C^2_1&&C^2_2&&\\
&C^3_0&&C^3_1&&C^3_2&&C^3_3&\\
C^4_0&&C^4_1&&C^4_2&&C^4_3&&C^4_4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
&&&&1&&&&\\
&&&1&&1&&&\\
&&1&&2&&1&&\\
&1&&3&&3&&1&\\
1&&4&&6&&4&&1
\end{array}$$

1. 每一列數字都是左右對稱（相等）：
   這是因為 $C^n_k = C^n_{n-k}$，$C^n_0 = C^n_n = 1$。
2. 巴斯卡公式：
   從第三列開始，向下各列，除兩端外，其他的數等於上方左右兩數之和，即 $C^n_k = C^{n-1}_{k-1} + C^{n-1}_k$，$1 \le k \le n-1$。

例題 1　組合公式

(1) 試計算 C^{20}_3 的值。(5 分)

(2) 已知 $C^{12}_k = C^{12}_3$，試求 k 值。(5 分)

解

(1) $C^{20}_3 = \dfrac{20 \times 19 \times 18}{1 \times 2 \times 3}$

$= 1140$

(2) $k = 3$ 或 $k = 12 - 3 = 9$

$\therefore k = 3$ 或 9

3-3

例題 2　基礎組合問題

(1) 某校規定，學生須在修業期間內，從 8 個開放選修的科目中選修 3 個，試問有幾種可能的選修組合？(5 分)

(2) 某高中打算從週一到週五的五天中，挑選兩天開放穿便服到校，試問有幾種安排的方式？(5 分)

解

(1) $C^8_3 = \dfrac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3}$

$= 56$(種)

(2) $C^5_2 = \dfrac{5 \times 4}{1 \times 2} = 10$(種)

翰林用心教師用精益求精

例題 3　組合與乘法原理

⑴ 為慶祝週年慶，某餐廳特別提供「保證飽特餐」回饋顧客。內容為沙拉或湯 6 選 2，主菜 5 選 2，主食 3 選 1，飲料或甜點 5 選 2。試問共有幾種點餐組合的可能？（5 分）

⑵ 某社區管委會打算從 8 名男性及 7 名女性委員中，選出 5 名常務委員，如果規定任何一個性別都不能少於 2 人，試問有幾種可能的組合？（5 分）

解 ⑴ $C^6_2 \times C^5_2 \times C^3_1 \times C^5_2$

$= 15 \times 10 \times 3 \times 10$

$= 4500$（種）

⑵ 由題意知，可能是 2 男 3 女或 3 男 2 女

$\therefore C^8_2 \times C^7_3 + C^8_3 \times C^7_2$

$= 28 \times 35 + 56 \times 21$

$= 980 + 1176$

$= 2156$（種）

3-3

例題 4　分組分堆問題

將 8 本不同的書依下列方式分成 3 堆，試求各有幾種分法？

⑴ 一堆 5 本，一堆 2 本，一堆 1 本。（5 分）

⑵ 一堆 4 本，一堆 2 本，一堆 2 本。（5 分）

解 ⑴ $C^8_5 \times C^3_2 \times C^1_1$

$= 56 \times 3 \times 1 = 168$（種）

⑵ $C^8_4 \times C^4_2 \times C^2_2 \times \dfrac{1}{2!}$

$= 70 \times 6 \times \dfrac{1}{2} = 210$（種）

例題 5 組合問題

將 5 枝完全相同的鉛筆分給小朋友，試求各有幾種分法？

(1) 分給 8 個小朋友，每人最多 1 枝（有 3 人沒有鉛筆）。（5 分）

(2) 分給 3 個小朋友，每人至多 2 枝。（5 分）

解 (1) 從 8 人中選 5 人各給 1 枝

$C^8_5 = 56$（種）

(2) $5 = 2 + 2 + 1$，即由 3 人中選 2 人各給 2 枝

$C^3_2 = 3$（種）

3-3

例題 6 綜合問題

羅老師打算從班上跑步比較快的 8 名男生、6 名女生中，各選出 2 名參加運動會的 400 公尺接力賽，試求：

(1) 若隨機安排為第一棒至第四棒，共有幾種選手名單？（5 分）

(2) 若男生安排為第一棒與第四棒，女生安排為第二、三棒，共有幾種選手名單？（5 分）

解 從 8 名男生選 2 人，$C^8_2 = 28$

從 6 名女生選 2 人，$C^6_2 = 15$

(1) 隨機安排的方法數 $P^4_4 = 4! = 24$

$\therefore 28 \times 15 \times 24 = 10080$（種）

(2) 男生排序有 $2!$ 種，女生也有 $2!$ 種

$\therefore 28 \times 15 \times 2! \times 2! = 1680$（種）

翰林用心 教師用 精益求精

例題 7　二項式定理(一)

(1) 試求 $(x+y)^7$ 展開後，x^5y^2 項的係數。（5 分）

(2) 試求 $(x-y)^5$ 展開後，x^2y^3 項的係數。（5 分）

解 (1) $(x+y)^7$ 的 x^5y^2 項為 $C^7_2x^5y^2$

$\therefore$ 係數為 $C^7_2=21$

(2) $(x-y)^5=[x+(-y)]^5$

x^2y^3 項為 $C^5_3x^2(-y)^3=-C^5_3x^2y^3$

$\therefore$係數為 $-C^5_3=-10$

3-3

例題 8　二項式定理(二)

(1) 試求 $(2x+y)^5$ 展開後，x^3y^2 項的係數。（5 分）

(2) 試求 $(3x-2y)^3$ 展開後，xy^2 項的係數。（5 分）

解 (1) $(2x+y)^5$ 的 x^3y^2 項為

$C^5_2(2x)^3y^2=2^3C^5_2x^3y^2$

$\therefore$係數為 $8\times C^5_2=8\times 10=80$

(2) $(3x-2y)^3=[3x+(-2y)]^3$

xy^2 項為 $C^3_2(3x)(-2y)^2=3(-2)^2C^3_2xy^2$

$\therefore$係數為 $3\times 4\times C^3_2=3\times 4\times 3=36$

例題 9 巴斯卡三角形

某教練打算從甲、乙、丙、丁、戊、己、庚、辛等 8 人中挑選 5 人參加籃球比賽，試求：

(1) 若任意挑選，有幾種方法？（5 分）

(2) 假設不選甲有 m 種方法，必選甲有 n 種方法，則數對 $(m, n)=$？（5 分）

解 (1) $C^8_5=56$（種）

(2) 不選甲，由其餘 7 人選 5 人

$\Rightarrow m=C^7_5=21$

必選甲，由其餘 7 人選 4 人

$\Rightarrow n=C^7_4=35$

$\therefore$ 數對 $(m, n)=(21, 35)$

說明：本題可藉由(1)(2)小題 $C^8_5=C^7_4+C^7_5$

驗證巴斯卡公式 $C^n_k=C^{n-1}_{k-1}+C^{n-1}_k$

例題 10 組合公式的應用

(1) 若 $2C^n_2=C^{n+1}_3$，試求 n 值。（5 分）

(2) 若 $C^n_1+C^n_{n-2}=21$，試求 n 值。（5 分）

解 (1) $2C^n_2=C^{n+1}_3$

$$\Rightarrow 2\times\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{(n+1)!}{3!(n-2)!}\Rightarrow\frac{2\times n!}{2(n-2)!}=\frac{(n+1)\times n!}{6(n-2)!}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{1}=\frac{n+1}{6}\Rightarrow n+1=6\Rightarrow n=5$$

(2) $C^n_1+C^n_{n-2}=21$

$$\Rightarrow C^n_1+C^n_2=21\Rightarrow n+\frac{n(n-1)}{1\times 2}=21$$

$\Rightarrow 2n+n^2-n=42\Rightarrow n^2+n-42=0$

$\Rightarrow (n-6)(n+7)=0\Rightarrow n=6$ 或 -7（不合）

故 $n=6$