

一、單選題(每題5分,共10分)

1. 標準位置角 4012° 在哪一個象限?

(A)第一象限

(B)第二象限

(C)第三象限

(D)第四象限

(E)無法判斷

解 $4012^\circ = 52^\circ + 360^\circ \times 11$ 52° 在第一象限

故選(A)

2. 已知標準位置角 θ 滿足 $\sin\theta < 0$, $\tan\theta > 0$, 則 θ 在哪一個象限?

(A)第一象限

(B)第二象限

(C)第三象限

(D)第四象限

(E)無法判斷

解 $\because \sin\theta < 0 \therefore \theta$ 可能在第三或第四象限又 $\tan\theta > 0 \therefore \theta$ 可能在第一或第三象限由以上討論知 θ 在第三象限

故選(C)

二、多選題 (每題 5 分, 所有選項均答對者得 5 分, 錯一個選項得 3 分, 錯兩個選項得 1 分, 其餘不給分, 共 10 分)

3. 請就下列三角比的關係, 選出正確的選項。

(A) $\sin 36^\circ = \cos 36^\circ$

(B) $\sin 80^\circ = \cos 10^\circ$

(C) $\sin 40^\circ = \sin 140^\circ$

(D) $\tan 60^\circ = \sin 30^\circ$

(E) $\tan 43^\circ = \frac{\sin 43^\circ}{\cos 43^\circ}$

解 (A) $\times$: $\sin 36^\circ = \sin(90^\circ - 54^\circ) = \cos 54^\circ$

(B) $\bigcirc$: $\sin 80^\circ = \sin(90^\circ - 10^\circ) = \cos 10^\circ$

(C) $\bigcirc$: $\sin 40^\circ = \sin(180^\circ - 140^\circ) = \sin 140^\circ$

(D) $\times$: $\tan 60^\circ = \sqrt{3}$, $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

(E) $\bigcirc$: $\tan 43^\circ = \frac{\sin 43^\circ}{\cos 43^\circ}$

此為商數關係

故選(B)(C)(E)

4. 請選出 230° 的同界角。

(A) 1230°

(B) 950°

(C) 630°

(D) -130°

(E) -230°

解 (A) $\times$: $1230^\circ = 150^\circ + 360^\circ \times 3$

(B) $\bigcirc$: $950^\circ = 230^\circ + 360^\circ \times 2$

(C) $\times$: $630^\circ = 270^\circ + 360^\circ \times 1$

(D) $\bigcirc$: $-130^\circ = 230^\circ + 360^\circ \times (-1)$

(E) $\times$: $-230^\circ = 130^\circ + 360^\circ \times (-1)$

故選(B)(D)

三、填充題(每格 5 分, 共 60 分)

5. 已知 $0^\circ < \theta < 90^\circ$, $\tan \theta = \frac{2}{3}$, 則:

(1) $\tan(\theta - 180^\circ) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\frac{3 \cos \theta - 2 \sin \theta}{2 \cos \theta + 3 \sin \theta} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 (1) $\tan(\theta - 180^\circ)$
 $= \tan[-(180^\circ - \theta)] = -\tan(180^\circ - \theta)$
 $= -(-\tan \theta) = \tan \theta = \frac{2}{3}$

(2) $\frac{3 \cos \theta - 2 \sin \theta}{2 \cos \theta + 3 \sin \theta} = \frac{\frac{3 \cos \theta - 2 \sin \theta}{\cos \theta}}{\frac{2 \cos \theta + 3 \sin \theta}{\cos \theta}} = \frac{3 - 2 \tan \theta}{2 + 3 \tan \theta} = \frac{3 - 2 \times \frac{2}{3}}{2 + 3 \times \frac{2}{3}} = \frac{\frac{5}{3}}{4} = \frac{5}{12}$

6. 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$, θ 為第二象限角, 則:

(1) $\sin \theta - \cos \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $\sin \theta = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 (1) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{1}{25}$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25} \Rightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{25}$$

$$\Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = -\frac{24}{25} \Rightarrow \sin \theta \cos \theta = -\frac{12}{25}$$

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = 1 - 2 \sin \theta \cos \theta = 1 + \frac{24}{25} = \frac{49}{25} \Rightarrow \sin \theta - \cos \theta = \pm \frac{7}{5}$$

但 θ 在第二象限, $\sin \theta > 0$, $\cos \theta < 0$ $\therefore \sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}$

(2) 已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{5}$

由(1)得 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{7}{5}$

兩式相加得 $2 \sin \theta = \frac{8}{5} \therefore \sin \theta = \frac{4}{5}$

7. 如右圖， θ 為有向角， $\overline{AB} = 3$ ， $\overline{BC} = 4$ ，試求：

(1) $\cos \theta =$ _____。

(2) $\tan \theta =$ _____。

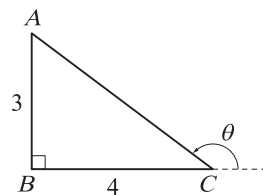
解 (1) $\overline{AC} = \sqrt{16 + 9} = 5$

$$\therefore \cos \theta = \cos (180^\circ - \angle ACB)$$

$$= -\cos \angle ACB = -\frac{4}{5}$$

(2) $\tan \theta = \tan (180^\circ - \angle ACB)$

$$= -\tan \angle ACB = -\frac{3}{4}$$



8. 如右圖，圓內接四邊形 $ABCD$ 中， $\angle DBC = 30^\circ$ ， $\angle DBA = 45^\circ$ ， $\overline{CD} = 6$ ，試求：

(1) $\overline{AD} =$ _____。

(2) 圓面積為 _____。

解 由已知得 $\triangle ABD$ 與 $\triangle CBD$ 有共同的外接圓

設此外接圓半徑為 R

由正弦定理知

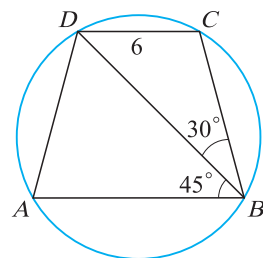
$$\text{在 } \triangle ABD \text{ 中，} \frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ} = 2R \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\text{在 } \triangle CBD \text{ 中，} \frac{6}{\sin 30^\circ} = 2R \cdots \cdots \textcircled{2}$$

(1) 由①、②得 $\frac{\overline{AD}}{\sin 45^\circ} = \frac{6}{\sin 30^\circ}$

$$\Rightarrow \overline{AD} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{6}{\frac{1}{2}} = 6\sqrt{2}$$

(2) 由②得 $R = \frac{6}{2 \times \frac{1}{2}} = 6$ ，故圓面積為 36π



9. 已知等腰三角形 ABC 的頂角 $\angle A = 120^\circ$ ，外接圓半徑為 8，試求：

(1) $\overline{BC} =$ _____。

(2) $\triangle ABC$ 面積為 _____。

解

由已知得 $\angle B = \angle C = \frac{1}{2}(180^\circ - 120^\circ) = 30^\circ$

設 $\triangle ABC$ 外接圓半徑為 R

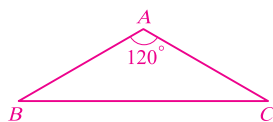
由正弦定理知 $\frac{\overline{BC}}{\sin 120^\circ} = \frac{\overline{AC}}{\sin 30^\circ} = 2R$

(1) $\overline{BC} = 2R \sin 120^\circ = 2 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 8\sqrt{3}$

(2) $\overline{AC} = 2R \sin 30^\circ = 2 \times 8 \times \frac{1}{2} = 8$

又 $\overline{AB} = \overline{AC} = 8$

$$\begin{aligned} \therefore \triangle ABC \text{ 面積為 } & \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AC} \times \sin 120^\circ \\ & = \frac{1}{2} \times 8 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 16\sqrt{3} \end{aligned}$$



10. 坐標平面上有 A 、 B 兩點，已知 A 點極坐標為 $[6, 70^\circ]$ ， B 點極坐標為 $[8, 130^\circ]$ ，試求：

(1) $\overline{AB} =$ _____。

(2) $\triangle OAB$ 面積為 _____。

解

$\angle AOB = 130^\circ - 70^\circ = 60^\circ$

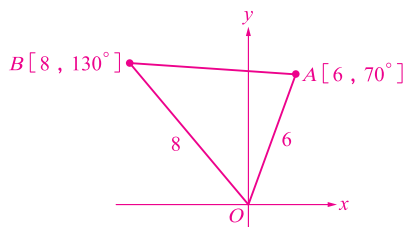
(1) 在 $\triangle OAB$ 中，由餘弦定理知

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= 64 + 36 - 2 \times 8 \times 6 \times \cos 60^\circ \\ &= 100 - 48 = 52 \end{aligned}$$

$\therefore \overline{AB} = 2\sqrt{13}$

(2) 由面積公式得

$$\begin{aligned} \triangle OAB \text{ 面積為 } & \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} \times \sin 60^\circ \\ & = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3} \end{aligned}$$



四、計算題(每題 10 分，共 20 分)

11. θ 為銳角，試證明 $\frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta}$ 。

$$\begin{aligned} \text{證 } \frac{1 + \cos \theta}{\sin \theta} &= \frac{(1 + \cos \theta)(1 - \cos \theta)}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{1 - \cos^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\sin \theta (1 - \cos \theta)} = \frac{\sin \theta}{1 - \cos \theta} \end{aligned}$$

12. 如右圖，地面上 A 、 B 兩點距離 800 公尺，地面 C 點有一鐵塔，自 A 測得塔頂 D 的仰角為 30° ，自 B 測得塔頂 D 的仰角為 45° 。今自塔頂 D 測得 $\angle ADB = 45^\circ$ ，試求塔高 $\overline{CD}$ 。

解 設塔高 $\overline{CD} = h$

在 $\triangle ACD$ 中，

$$\sin 30^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{AD}} = \frac{h}{\overline{AD}} \quad \therefore \overline{AD} = \frac{h}{\frac{1}{2}} = 2h$$

在 $\triangle BCD$ 中，

$$\sin 45^\circ = \frac{\overline{CD}}{\overline{BD}} = \frac{h}{\overline{BD}} \quad \therefore \overline{BD} = \frac{h}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}h$$

在 $\triangle ABD$ 中，

$$\begin{aligned} \overline{AB}^2 &= \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 - 2 \times \overline{AD} \times \overline{BD} \times \cos D \\ \therefore 800^2 &= (2h)^2 + (\sqrt{2}h)^2 - 2 \times 2h \times \sqrt{2}h \times \cos 45^\circ \\ \Rightarrow 640000 &= 4h^2 + 2h^2 - \frac{2 \times 2h \times \sqrt{2}h \times \sqrt{2}}{2} = 2h^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow h^2 = 320000 \Rightarrow h = 400\sqrt{2}$$

$\therefore$ 塔高為 $400\sqrt{2}$ 公尺

