

一、單選題(每題5分,共10分)

1. 下列哪一個數列的第5項為5?

(A) $\langle 5n \rangle$

(B) $\langle n^2 \rangle$

(C) $\langle 5 \rangle$

(D) $\langle 5n - 5 \rangle$

(E) $\langle 5n + 5 \rangle$

解 將 $n = 5$ 分別代入選項(A)、(B)、(D)、(E)的一般項

分別得到 25、25、20、30

選項(C)的 $\langle 5 \rangle$ 是每一項都是 5 的數列

第5項也是 5

故選(C)

2. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項為 $a_1 = 6$, 則 $n \geq 2$ 時, 下列哪一個選項的遞迴關係會使 $\langle a_n \rangle$ 是等差數列?

(A) $a_n = n a_{n-1}$

(B) $a_n = n + a_{n-1}$

(C) $a_n = 2a_{n-1}$

(D) $a_n = 2 + a_{n-1}$

(E) $a_n = -a_{n-1}$

解 檢查各選項的 $a_n - a_{n-1}$ 是否為定值

(A) $a_n - a_{n-1} = n a_{n-1} - a_{n-1} = (n-1) a_{n-1}$

不是定值

(B) $a_n - a_{n-1} = n + a_{n-1} - a_{n-1} = n$

不是定值

(C) $a_n - a_{n-1} = 2a_{n-1} - a_{n-1} = a_{n-1}$

不是定值

(D) $a_n - a_{n-1} = 2 + a_{n-1} - a_{n-1} = 2$

是一個公差為 2, 首項為 6 的等差數列

(E) $a_n - a_{n-1} = -a_{n-1} - a_{n-1} = -2a_{n-1}$

不是定值

故選(D)

二、多選題 (每題5分, 所有選項均答對者得5分, 錯一個選項得3分, 錯兩個選項得1分, 其餘不給分, 共10分)

3. 下列哪些數列是等比數列?

- (A) $\langle 3, 3, 3, 3, 3 \rangle$
 (B) $\langle 2, 4, 6, 8, 10, 12 \rangle$
 (C) $\langle 1, -1, 1, -1, 1, -1 \rangle$
 (D) $\langle -2, -4, 8, 16, -32, -64, 128, 256 \rangle$
 (E) $\langle 32, 48, 72, 108, 162, 243 \rangle$

解 將各選項的後項除以前項, 逐一比較

(A) $\bigcirc : \frac{3}{3} = \frac{3}{3} = \dots = 1$, 是等比數列

(B) $\times : \frac{4}{2} \neq \frac{6}{4}$

(C) $\bigcirc : \frac{-1}{1} = \frac{1}{-1} = \dots = -1$, 是等比數列

(D) $\times : \frac{-4}{-2} \neq \frac{8}{-4}$

(E) $\bigcirc : \frac{48}{32} = \frac{72}{48} = \dots = \frac{243}{162} = \frac{3}{2}$, 是等比數列

故選(A)(C)(E)

4. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 所形成的級數 $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 2n^2$, 則下列選項哪些正確?

- (A) $a_1 = 2$ (B) $a_2 = 8$ (C) $a_3 = 10$
 (D) 數列 $\langle a_n \rangle$ 是等差數列 (E) $a_n = 4n - 2$

解 (A) $\bigcirc : a_1 = S_1 = 2 \times 1^2 = 2$

(B) $\times : a_2 = S_2 - S_1 = 2 \times 2^2 - 2 \times 1^2 = 8 - 2 = 6$

(C) $\bigcirc : a_3 = S_3 - S_2 = 2 \times 3^2 - 2 \times 2^2 = 18 - 8 = 10$

(D)(E) $\bigcirc : a_n = S_n - S_{n-1} = 2n^2 - 2(n-1)^2$

$$= 2[n^2 - (n-1)^2]$$

$$= 2[(n+n-1)(n-n+1)]$$

$$= 2(2n-1) = 4n-2$$

$$a_n - a_{n-1} = (4n-2) - [4(n-1)-2]$$

$$= 4n-2 - (4n-6)$$

$$= 4n-2-4n+6 = 4$$

$\therefore \langle a_n \rangle$ 是公差為 4 的等差數列

故選(A)(C)(D)(E)

三、填充題 (每格 5 分, 共 60 分)

5. 等差數列 $\langle a_n \rangle$ 中, 若 $a_4 + a_6 = 16$, $a_5 + a_9 = 28$, 則公差 $d =$ _____, $a_7 =$ _____。

解 由 $a_4 + a_6 = 16$, $a_5 + a_9 = 28$

$$\text{得} \begin{cases} a_1 + 3d + a_1 + 5d = 16 \\ a_1 + 4d + a_1 + 8d = 28 \end{cases}$$

$$\text{整理得} \begin{cases} 2a_1 + 8d = 16 \cdots \cdots \text{①} \\ 2a_1 + 12d = 28 \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\text{②} - \text{①} \text{ 得 } 4d = 12 \Rightarrow d = 3 \text{ 代入 ①}$$

$$2a_1 = 16 - 8d = 16 - 24 = -8 \Rightarrow a_1 = -4$$

$$\therefore a_7 = a_1 + 6d = -4 + 6 \times 3 = 14$$

6. 試求下列級數和：

$$(1) 10 + 14 + 18 + \cdots + 46 = \text{_____}。$$

$$(2) 32 + 16 + 8 + \cdots + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{32} = \text{_____}。$$

解 (1) 公差 $d = 14 - 10 = 4$

$$46 = 10 + 4 \times (n - 1)$$

$$\Rightarrow 4n = 40 \Rightarrow n = 10$$

$\therefore$ 此級數共有 10 項

$$\text{故級數和為 } \frac{10 \times (10 + 46)}{2} = 280$$

$$(2) \text{ 公比 } r = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{32} = 32 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2^5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$$

$$\Rightarrow n - 1 = 10 \Rightarrow n = 11$$

$$\therefore \text{級數和為 } \frac{32 \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{11}\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{2047}{32}$$

7. 試求下列級數和：

(1) $1 \times 1 + 2 \times 3 + 3 \times 5 + \cdots + 29 \times 57 + 30 \times 59 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(2) $11^2 + 12^2 + 13^2 + \cdots + 59^2 + 60^2 = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

解 (1) 此級數一般項為 $k(2k-1) = 2k^2 - k$

$$\therefore k = 1, 2, \cdots, 30$$

$$\therefore \text{其和為 } 2 \times \frac{30 \times 31 \times 61}{6} - \frac{30 \times 31}{2}$$

$$= 18910 - 465$$

$$= 18445$$

(2) $11^2 + 12^2 + 13^2 + \cdots + 59^2 + 60^2$

$$= (1^2 + 2^2 + \cdots + 60^2) - (1^2 + 2^2 + \cdots + 10^2)$$

$$= \frac{60 \times 61 \times 121}{6} - \frac{10 \times 11 \times 21}{6}$$

$$= 73810 - 385$$

$$= 73425$$

8. 綜合演藝廳 A 區有 12 排座位，由前到後，每一排座位逐漸增加 1 個。已知最後一排有 40 個座位，則：

(1) 第一排有 個座位。

(2) A 區共有 個座位。

解 (1) 設第 k 排有 a_k 個座位

$$\text{則 } a_{12} = a_1 + 11 \times 1$$

$$\Rightarrow a_1 + 11 = 40$$

$$\Rightarrow a_1 = 29$$

故第一排有 29 個座位

(2) 座位總數為

$$S_{12} = \frac{12 \times (29 + 40)}{2} = 414 (\text{個})$$

9. 用牙籤拼成連續三角形如右圖，依此規律，第6圖有_____枝牙籤，從第1圖拼到第8圖共需要_____枝牙籤。



解 設 a_k 表示第 k 圖的牙籤數

由前3圖觀察得

$$a_1 = 3$$

$$a_2 = 3 + 4 \times 1$$

$$a_3 = 3 + 4 \times 2$$

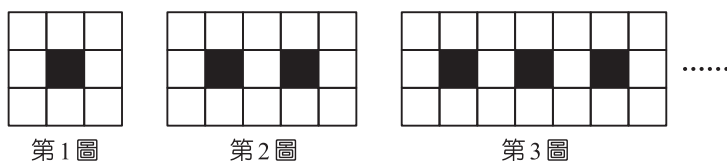
$$\text{故可知 } a_n = 3 + 4(n-1)$$

$$\therefore a_6 = 3 + 4 \times 5 = 23$$

$$S_8 = \frac{8[2 \times 3 + 4 \times (8-1)]}{2} = 136$$

故第6圖有23枝牙籤，從第1圖拼到第8圖共需要136枝牙籤

10. 用黑白兩色正方形瓷磚拼成如下圖形，依此規律，第4圖需要_____個白色瓷磚；若以 a_n 表示第 n 圖需要的白色瓷磚數量，則 $a_n =$ _____。



解 設 a_k 表示第 k 圖的白瓷磚個數

觀察圖形得 $a_1 = 8$ ， $a_2 = 8 + 5$ ， $a_3 = 8 + 5 \times 2$

$$\therefore a_4 = 8 + 5 \times 3 = 23$$

顯然這是公差為5的等差數列

$$\text{故得 } a_n = 8 + 5(n-1)$$

$$= 5n + 3$$

四、計算題(每題 10 分, 共 20 分)

11. 翰翰銀行於週年慶推出甲、乙兩種優惠存款方案。甲方案是一次存入 24 萬元, 以年利率 1.5% 複利孳息, 滿兩年後結算本息。乙方案是每月初存入 1 萬元, 以月利率 0.1% 複利孳息, 滿兩年後結算本息。試求:

- (1) 甲方案本息總和。(5 分)
- (2) 乙方案本息總和。(已知 $1.001^{24} \approx 1.024$) (5 分)

解 (1) $240000 \times (1 + 0.015)^2 = 247254$ (元)

(2) 每月初存入 10000 元再複利孳息可得

$$10000 \times 1.001^{24} + 10000 \times 1.001^{23} + \cdots + 10000 \times 1.001^1$$

$$= 10000 \times (1.001 + 1.001^2 + \cdots + 1.001^{24})$$

$$= 10000 \times \frac{1.001 \times (1 - 1.001^{24})}{1 - 1.001}$$

$$\approx 10000 \times \frac{1.001(1 - 1.024)}{-0.001}$$

$$= 10000 \times 1.001 \times 24$$

$$= 240240$$

故約為 240240 元

12. 試利用數學歸納法證明: $1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$,

對所有正整數 n 都成立。

證 (1) 當 $n=1$ 時, $1 \times 2 = \frac{1 \times 2 \times 3}{3} = 2$, 原式成立

(2) 設 $n=k$ 時, 原式成立, 即

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + k(k+1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

則 $n=k+1$ 時,

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \cdots + k(k+1) + (k+1)[(k+1)+1]$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k+1)(k+2)$$

$$= \frac{k(k+1)(k+2) + 3(k+1)(k+2)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3} = \frac{(k+1)[(k+1)+1][(k+1)+2]}{3}$$

所以 $n=k+1$ 時, 原式也成立

故由數學歸納法可知, 原式對所有正整數 n 都成立