3-4 機　率

重點整理

一、樣本空間

1. 試驗：在相同的條件下重複執行，但不確定其結果的程序。
   例：投擲一枚硬幣，結果可能出現正面，也可能出現反面。
2. 樣本空間：試驗的所有結果所成的集合，稱為樣本空間（Sample space）。
   例：擲一顆骰子，觀察出現的點數，樣本空間 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$。
3. 樣本：樣本空間的每一個元素，都可以稱為樣本點（簡稱為樣本）。
   例：擲一顆骰子，樣本空間 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，其中 1 或 2 或……或 6，都可以稱為樣本。

二、事件

事件：樣本空間的任何一個部分集合，都可稱為事件（event）。

事件的符號：「事件」是集合，必須以集合的符號（大括弧）表示。如{1，3，6}。

事件發生：試驗的結果，是事件 A 的一個樣本點時，稱 A 事件發生，否則稱 A 事件不發生。

例：擲一顆骰子，觀察出現的點數，則樣本空間 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$。
事件 $A=\{1,2\}$、事件 $B=\{1,3,5\}$、事件 $C=\{1,2,3,4\}$。
已知小兔擲出 2 點，則我們說：事件 A 發生、事件 B 不發生、事件 C 發生。

關於樣本空間與事件的名詞及運算，底下以具體例子說明：

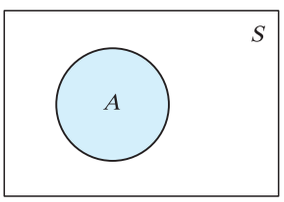
擲一顆骰子，觀察出現的點數，其樣本空間、事件及事件的運算示例如下，並令 A 為出現奇數點的事件，B 為大於 4 點的事件，C 為小於 3 點的事件。

	意　義	示　例
樣本空間	試驗的所有結果所成的集合	$S=\{1,2,3,4,5,6\}$
樣本	樣本空間的元素	1，2，3，4，5，6
基本事件	只有一個樣本的事件又稱為單一事件	{1}，{2}，{3}，{4}，{5}，{6}
複合事件	兩個以上樣本點構成的事件	出現奇數點的事件 $A=\{1,3,5\}$ 大於 4 點的事件 $B=\{5,6\}$ 小於 3 點的事件 $C=\{1,2\}$
必然事件	也稱為全事件，就是樣本空間	{1，2，3，4，5，6}
不可能事件	又稱為空事件	{ }或 $\varnothing$
積事件	兩個事件的交集 $A\cap B$，「$A\cap B$ 發生」表示 A、B 同時發生	$A\cap B=\{5\}$，$A\cap C=\{1\}$， $B\cap C=\{\ \}$
和事件	兩個事件的聯集 $A\cup B$，「$A\cup B$ 發生」表示 A、B 至少有一事件發生	$A\cup B=\{1,3,5,6\}$， $A\cup C=\{1,2,3,5\}$， $B\cup C=\{1,2,5,6\}$

互斥事件	兩個事件沒有相同的樣本，表示這兩個事件不可能同時發生	$B\cap C=\{\ \}$，表示 B 與 C 不可能同時發生
餘事件	樣本空間與事件的差集 $A'=S-A$，A' 表示 A 不發生	$A'=S-A=\{2,4,6\}$，同理， $B'=\{1,2,3,4\}$， $C'=\{3,4,5,6\}$

三、古典機率

1. 古典機率的定義：



假設某試驗樣本空間的樣本點個數有限，且每一個基本事件（一個樣本點構成）的發生機會都相等，則事件 A 發生的機率定義為 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$，其中 $n(A)$ 與 $n(S)$ 分別表示 A 與 S 的元素個數。

例：擲一顆公正的骰子，討論擲出點數的相關問題。

這個試驗的樣本空間為 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，

基本事件為 $\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{6\}$。

由於每面出現的機會相等，所以每一種點數（即每一個基本事件）發生的機會視為相同。

故 $\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{5\}$，$\{6\}$ 發生的機率都是 $\dfrac{1}{6}$。

對於出現偶數點的事件 A 而言，$A=\{2,4,6\}$，$P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}=\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$。

補充：在機率單元裡，有關投擲硬幣或骰子的問題常出現「均勻」或「公正」二字，就是假設每一個基本事件發生的機率相等。例如擲均勻硬幣出現正面或反面的機率都是 $\dfrac{1}{2}$，擲公正骰子出現任何一種點數的機率都是 $\dfrac{1}{6}$。

2. 機率的性質：

古典機率的定義與計算，以集合（樣本空間、事件）的元素個數計算為基礎。因此，機率的性質也類似集合的性質。

令 S 為某試驗樣本空間，樣本點為有限多個，A、B 為事件，則有：

(1) $0\le P(A)\le 1$。

(2) $P(S)=1$，$P(\varnothing)=0$。

(3) $P(A')=1-P(A)$。

(4) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$。

(5) $P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$。

四、期望值

假設 A_1，A_2，……，A_n 為樣本空間 S 的事件，並且滿足下列兩個條件：

1. 這 n 個事件的聯集就是樣本空間 S。
2. 任意兩個事件的積事件（交集）是空集合。

設事件 A_i 發生的機率為 p_i，且事件 A_i 發生可得值為 m_i，$i=1,2,\cdots\cdots,n$，則定義期望值為 $E=m_1p_1+m_2p_2+\cdots\cdots+m_np_n$。

翰林用心 教師用 精益求精

例：擲一顆公正的骰子，可獲得擲出點數 10 倍的彩金（例如 5 點得 50 元），求期望值。

事件	{1}	{2}	{3}	{4}	{5}	{6}
彩金	10	20	30	40	50	60
機率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

∵事件{1}，{2}，{3}，{4}，{5}，{6}發生的機率都是 $\frac{1}{6}$

∴期望值為 $10\times\frac{1}{6}+20\times\frac{1}{6}+30\times\frac{1}{6}+40\times\frac{1}{6}+50\times\frac{1}{6}+60\times\frac{1}{6}$

$=210\times\frac{1}{6}=35$（元）

例題 1　寫出試驗的樣本空間與樣本(一)

擲一枚硬幣 3 次，觀察出現的正反面並依序記錄。例如：以（正，正，正）的方式代表連續三次都出現正面。試寫出：

(1) 樣本空間。（4 分）

(2) 不可能事件。（2 分）

(3) 出現 2 次正面的事件。（2 分）

(4) 三次都是反面的事件。（2 分）

解 (1) S={（正，正，正），（正，正，反），（正，反，正），（正，反，反），
（反，正，正），（反，正，反），（反，反，正），（反，反，反）}

(2) ∅（或{ }）

(3) {（正，正，反），（正，反，正），（反，正，正）}

(4) {（反，反，反）}

例題 2　寫出試驗的樣本空間與樣本(二)

擲一顆骰子一次，觀察出現的點數。試寫出：

(1) 出現奇數點數的事件。（5 分）

(2) 點數不大於 4 的事件。（5 分）

解 (1) $\{1，3，5\}$

(2) $\{1，2，3，4\}$

例題 3　事件的運算

擲一顆骰子一次，觀察出現的點數。令 S 表示這個試驗的樣本空間，A 表示點數不小於 4 的事件，B 表示出現偶數點的事件。試寫出：

(1) 事件 A。（2 分）

(2) 事件 B。（2 分）

(3) A 與 B 的和事件。（2 分）

(4) A 與 B 的積事件。（2 分）

(5) B 的餘事件。（2 分）

解 (1) $A=\{4，5，6\}$

(2) $B=\{2，4，6\}$

(3) $A\cup B=\{2，4，5，6\}$

(4) $A\cap B=\{4，6\}$

(5) $B'=\{1，3，5\}$

翰林用心 教師用 精益求精

例題 4　古典機率基礎問題㈠：擲硬幣

擲 3 枚均勻硬幣一次，觀察出現的正反面，試求：

⑴ 恰好一個正面的機率。（5 分）

⑵ 至少一個反面的機率。（5 分）

解 設樣本空間為 S，恰好一個正面的事件為 A，至少一個反面的事件為 B

$n(S)=2^3=8$

⑴ $n(A)=C_1^3=3$

$\therefore P(A)=\frac{3}{8}$

⑵ B' 表全無反面的事件 $n(B')=1$（3 個正面）

$\therefore P(B)=1-P(B')$

$=1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$

例題 5　古典機率基礎問題㈡：擲骰子

擲 2 顆公正的骰子一次，計算其點數和，試求：

⑴ 點數和為 6 的機率。（5 分）

⑵ 點數和大於 3 的機率。（5 分）

解 $n(S)=6^2=36$

⑴ $6=5+1=4+2=3+3=2+4=1+5$

點數和為 6 的事件為

$A=\{(5,1),(4,2),(3,3),(2,4),(1,5)\}$

$\therefore P(A)=\frac{5}{36}$

⑵ 仿⑴的討論，我們利用取捨原理

點數和小於或等於 3 的事件為

$B=\{(2,1),(1,2),(1,1)\}$

∴所求為 $P(B')=1-P(B)=1-\frac{3}{36}=\frac{11}{12}$

例題 6　古典機率基礎問題㈢：抽取撲克牌

一副撲克牌有 4 種花色，各有 13 種點數，合計 52 張牌。小明從一副撲克牌中任意抽取 2 張，試求：

⑴ 點數相同，花色不同的機率。（5 分）

⑵ 花色相同，點數不同的機率。（5 分）

解 $n(S)=C_2^{52}$

⑴ 點數相同花色不同有 $C_1^{13}\times C_2^4$ 種

$$\therefore\text{機率為}\ \frac{C_1^{13}\times C_2^4}{C_2^{52}}=\frac{\frac{13}{1}\times\frac{4\times3}{1\times2}}{\frac{52\times51}{1\times2}}=\frac{13\times4\times3}{52\times51}=\frac{1}{17}$$

⑵ 花色相同點數不同有 $C_1^4\times C_2^{13}$ 種

$$\therefore\text{機率為}\ \frac{C_1^4\times C_2^{13}}{C_2^{52}}=\frac{\frac{4}{1}\times\frac{13\times12}{1\times2}}{\frac{52\times51}{1\times2}}=\frac{4\times13\times12}{52\times51}=\frac{4}{17}$$

例題 7　古典機率基礎問題㈣：取球

袋中有 4 顆紅球與 3 顆白球，小雯依下列兩種方式取球，試求：

⑴ 同時取 2 球，取到 1 紅球 1 白球的機率。（5 分）

⑵ 同時取 4 球，取到 3 紅球 1 白球的機率。（5 分）

解 ⑴ $n(S)=C_2^7=21$

1 紅 1 白：$C_1^4\times C_1^3=12$

$$\therefore\text{機率為}\ \frac{12}{21}=\frac{4}{7}$$

⑵ $n(S)=C_4^7=35$

3 紅 1 白：$C_3^4\times C_1^3=12$

$$\therefore\text{機率為}\ \frac{12}{35}$$

翰林用心 教師用 精益求精

例題 8　機率性質與取捨原理(一)

假設樣本空間 $S=\{0，1，2，3，4，5，6，7，8，9\}$，事件 $A=\{2，4，6，8\}$，$B=\{3，4，5，6，7\}$。試求：

(1) $P(A\cap B)$。（3 分）

(2) $P(A\cup B)$。（3 分）

(3) $P(A\cap B')$。（4 分）

解

(1) $A\cap B=\{4，6\}$，故得 $P(A\cap B)=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

(2) $A\cup B=\{2，3，4，5，6，7，8\}$，故得 $P(A\cup B)=\frac{7}{10}$

(3) $A\cap B'=\{2，4，6，8\}\cap\{0，1，2，8，9\}=\{2，8\}$，故得 $P(A\cap B')=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

〈另解〉

因為 $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')$

代入得 $\frac{4}{10}=\frac{2}{10}+P(A\cap B')$，故 $P(A\cap B')=\frac{4}{10}-\frac{2}{10}=\frac{2}{10}=\frac{1}{5}$

例題 9　機率性質與取捨原理(二)

假設 S 為某試驗之樣本空間，A、B 為兩事件。若事件 A 或事件 B 發生的機率為 $\frac{5}{6}$，事件 A 與事件 B 均發生的機率為 $\frac{1}{6}$，事件 B 發生的機率為 $\frac{2}{3}$，試求：

(1) 事件 A 發生的機率。（5 分）

(2) 事件 A 發生且事件 B 不發生的機率。（5 分）

解

由題意知 $P(A\cup B)=\frac{5}{6}$，$P(A\cap B)=\frac{1}{6}$，$P(B)=\frac{2}{3}$

(1) $\because P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

代入得 $\frac{5}{6}=P(A)+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}$，解得 $P(A)=\frac{1}{3}$

(2) 事件 A 發生且事件 B 不發生的機率即為 $P(A\cap B')$

事件 A 發生可以分為「A 發生且 B 發生」與「A 發生且 B 不發生」

故得 $P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')$

代入得 $\frac{1}{3}=\frac{1}{6}+P(A\cap B')$

故 $P(A\cap B')=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{6}$

例題 10 期望值

袋中裝有大小相同的紅球 2 顆、白球 2 顆，自袋中一次取出 2 球：

⑴ 假設取出的 2 球顏色相同可得 20 元，顏色不同可得 10 元，試求此遊戲的期望值。（5 分）

⑵ 假設取出 2 紅球可得 50 元，2 白球可得 30 元，如果希望期望值為 0 元，則取出 2 球顏色不同時，應賠幾元？（5 分）

解 $n(S)=C_2^4=6$

⑴ 令事件 A 為 2 球顏色相同

事件 B 為 2 球顏色不同

$n(A)=C_2^2+C_2^2=2$

$n(B)=C_1^2\times C_1^2=4$

$\therefore$期望值為 $20\times\frac{2}{6}+10\times\frac{4}{6}=\frac{40}{3}$（元）

⑵ 取到 2 紅球的機率為 $\frac{C_2^2}{6}=\frac{1}{6}$

取到 2 白球的機率為 $\frac{C_2^2}{6}=\frac{1}{6}$

取到 2 球顏色不同的機率為 $1-\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\right)=\frac{4}{6}$

設所求為 x 元，則

$50\times\frac{1}{6}+30\times\frac{1}{6}-\frac{4x}{6}=0$

$\Rightarrow\frac{80}{6}=\frac{4x}{6}$

$\Rightarrow x=20$

故應賠 20 元

翰林用心 教師用 精益求精