

第4章 三角比

4-1 直角三角形的邊角關係

重點整理

一、直角三角形的三角比

■ 三角比的定義：

θ 為銳角時，可以作一個內角分別為 θ ， $90^\circ - \theta$ ， 90° 的直角三角形，其三邊分別稱為斜邊， θ 的對邊， θ 的鄰邊。我們定義

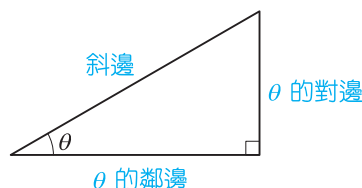
$\sin \theta = \frac{\theta \text{ 的對邊長}}{\text{斜邊長}}$ ，稱為 θ 的正弦 (sine)。

$\cos \theta = \frac{\theta \text{ 的鄰邊長}}{\text{斜邊長}}$ ，稱為 θ 的餘弦 (cosine)。

$\tan \theta = \frac{\theta \text{ 的對邊長}}{\theta \text{ 的鄰邊長}}$ ，稱為 θ 的正切 (tangent)。

例：如右圖， $\triangle ABC$ 是直角三角形，則

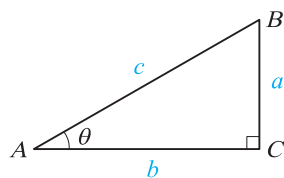
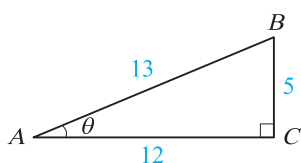
$$\sin \theta = \frac{5}{13}, \cos \theta = \frac{12}{13}, \tan \theta = \frac{5}{12}。$$



二、三角比的基本關係

如右圖，直角三角形 ABC 中， θ 為銳角， $\angle C = 90^\circ$ ，令 θ 的對邊長為 a ，鄰邊長為 b ，斜邊長為 c ，

則由定義可知 $\sin \theta = \frac{a}{c}$ ， $\cos \theta = \frac{b}{c}$ ， $\tan \theta = \frac{a}{b}$ 。



1. 商數關係：

設 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，則 $\frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \tan \theta$ 。

例：設 θ 為銳角， $\sin \theta = 0.6$ ， $\cos \theta = 0.8$ ，則 $\tan \theta = \frac{0.6}{0.8} = \frac{3}{4}$ 。

2. 平方關係：

設 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，則 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ 。

例： $\sin^2 90^\circ + \cos^2 90^\circ = 1$ ， $\sin^2 60^\circ + \cos^2 60^\circ = 1$ ， $\sin^2 23^\circ + \cos^2 23^\circ = 1$ 。

3. 餘角關係：

設 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，則 $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$ ， $\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$ 。

例： $\sin 30^\circ = \sin(90^\circ - 60^\circ) = \cos 60^\circ$ ， $\cos 40^\circ = \cos(90^\circ - 50^\circ) = \sin 50^\circ$ 。

三、用計算機求三角比與角度

常用角度單位有「度」與「弧度」，目前以「度」為單位，「弧度」在十一年級（高二）才會介紹。

使用計算機前，先確認螢幕是否顯示 DEG 模式（表示角度單位為「度」），否則立即按 **MODE**，**4** 設定為 DEG 模式。

因為普通計算機無法顯示帶根號的數（例如 $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ），所以這一類的三角比以小數顯示。

例如 $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ，螢幕顯示 0.866025403； $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，螢幕顯示

0.707106781。

補充：計算機的操作，不同機型間可能有些差異，詳細狀況請參考計算機說明書。

1. 求三角比：

先按角度，再按三角比名稱即可顯示這個角度的三角比。

例：(1) $\sin 30^\circ$ 。(2) $\cos 45^\circ$ 。(3) $\tan 60^\circ$ 。

先確認計算機在 DEG 模式，再依下列順序按鍵：

(1) **3**，**0**，**sin**，螢幕顯示：0.5，即 $\sin 30^\circ = 0.5$ 。

(2) **4**，**5**，**cos**，螢幕顯示：0.707106781，即 $\cos 45^\circ \approx 0.707106781$ 。

(3) **6**，**0**，**tan**，螢幕顯示：1.732050808，即 $\tan 60^\circ \approx 1.732050808$ 。

2. 由三角比反求角度：

先按三角比的值，再按 **SHIFT**，三角比名稱，即可顯示所要求的角度。

例：試利用計算機求出角度 θ 。

(1) θ 是銳角，且 $\sin \theta = 0.5$ 。

(2) θ 是銳角，且 $\cos \theta = 0.2$ 。

先確認計算機在 DEG 模式，再依下列順序按鍵：

(1) **0**，**.**，**5**，**SHIFT**，**sin**，螢幕顯示：30，即 30° 。

(2) **0**，**.**，**2**，**SHIFT**，**cos**，螢幕顯示：78.46304097，即 78.46304097° 。

（再按 **°，′，″** 鍵，可得 $78^\circ 27' 46.95''$ ）

補充：計算機大部分按鍵都有兩個以上的功能，要使用第二功能時，先按

SHIFT 鍵，再按該按鍵即可。如上例(1)，「由角度 θ 求正弦值」的 **sin** 與「由正弦值反求 θ 」的 $\sin^{-1}$ 是同一個按鍵，所以先按 **SHIFT** 鍵表示要用第二個功能 $\sin^{-1}$ 。

3. 仰角與俯角：

(1) 仰角：仰視目標物，視線與水平線的夾角。

(2) 俯角：俯視目標物，視線與水平線的夾角。

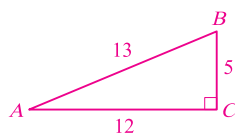
例題 1 直角三角形的三角比(一)

直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，兩股長 $\overline{BC} = 5$ ， $\overline{AC} = 12$ ，試求 $\sin A$ ， $\cos A$ ， $\tan A$ 。
(10 分)

解 由畢氏定理得 $\overline{AB}^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

$$\therefore \overline{AB} = 13$$

$$\text{故 } \sin A = \frac{5}{13}, \cos A = \frac{12}{13}, \tan A = \frac{5}{12}$$



例題 2 直角三角形的三角比(二)

直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，斜邊 $\overline{AB} = 8$ ， $\cos A = \frac{3}{4}$ ，試求：

(1) $\overline{AC}$ 。(5 分)

(2) $\tan A$ 。(5 分)

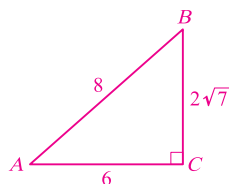
解 (1) 已知 $\cos A = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{AC}}{8} = \frac{3}{4}$

$$\therefore \overline{AC} = 6$$

(2) 由畢氏定理得 $\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 28$

$$\therefore \overline{BC} = 2\sqrt{7}$$

$$\text{故 } \tan A = \frac{2\sqrt{7}}{6} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$



例題 3 商數關係

已知 θ 為銳角且 $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = 2$ ，試求 $\tan\theta$ 之值。(10 分)

解 已知 $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = 2$

$$\text{移項得 } \sin\theta + \cos\theta = 2\sin\theta - 2\cos\theta$$

$$\Rightarrow 3\cos\theta = \sin\theta$$

$$\Rightarrow 3 = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \tan\theta$$

$$\text{故 } \tan\theta = 3$$

例題 4 平方關係、商數關係

已知 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ 且 $\cos\theta = \frac{3}{5}$ ，試求 $\sin\theta$ 與 $\tan\theta$ 。(10 分)

解 由平方關係 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$$\text{得 } \sin^2\theta + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\therefore \sin^2\theta = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow \sin\theta = \pm \frac{4}{5}, \text{ 但負號不合}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{4}{5}$$

$$\text{由商數關係得 } \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$$

例題 5 平方關係、餘角關係

直角三角形 ABC 中， $\angle C = 90^\circ$ ，已知 $\cos A = \frac{5}{13}$ ，試求 $\sin A$ ， $\sin B$ ， $\cos B$ 。(10 分)

解 由平方關係得

$$\sin^2 A + \left(\frac{5}{13}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow \sin^2 A = 1 - \frac{25}{169} = \frac{144}{169}$$

$$\Rightarrow \sin A = \pm \frac{12}{13}, \text{ 但負號不合}$$

$$\therefore \sin A = \frac{12}{13}$$

由餘角關係得

$$\sin B = \sin(90^\circ - A) = \cos A = \frac{5}{13}$$

$$\cos B = \cos(90^\circ - A) = \sin A = \frac{12}{13}$$

例題 6 平方關係(一)

已知 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，若 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{7}{5}$ ，試求：

(1) $\sin \theta \cos \theta$ 。(5 分)

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta$ 。(5 分)

解 (1) $(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{49}{25}$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25}$$

$$\Rightarrow 1 + 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{49}{25} \Rightarrow 2 \sin \theta \cos \theta = \frac{24}{25}$$

$$\therefore \sin \theta \cos \theta = \frac{12}{25}$$

(2) $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = (\sin \theta + \cos \theta)(\sin^2 \theta - \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta)$

$$= \frac{7}{5} \times \left(1 - \frac{12}{25}\right) = \frac{91}{125}$$

例題 7 平方關係(二)

已知 θ 為銳角，若 $\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2}$ ，試求：

(1) $\sin\theta + \cos\theta$ 。(4 分)

(2) $\sin\theta - \cos\theta$ 。(4 分)

(3) $\sin\theta$ 。(2 分)

解 (1) $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = \sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta$

$$= 1 + 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 2$$

$$\because \theta \text{ 為銳角} \quad \therefore \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2}$$

(2) $(\sin\theta - \cos\theta)^2 = 1 - 2\sin\theta\cos\theta$

$$= 1 - 2 \times \frac{1}{2}$$

$$= 0$$

$$\therefore \sin\theta - \cos\theta = 0$$

(3) 由(1)、(2) $\begin{cases} \sin\theta + \cos\theta = \sqrt{2} \\ \sin\theta - \cos\theta = 0 \end{cases}$

$$\therefore 2\sin\theta = \sqrt{2}, \text{ 得 } \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

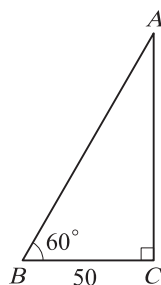
例題 8 簡易恆等式

已知 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ，試證明： $\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} = 2\tan\theta$ 。(10 分)

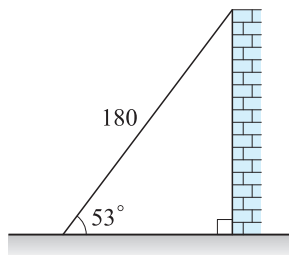
證
$$\begin{aligned} \frac{\cos\theta}{1-\sin\theta} - \frac{\cos\theta}{1+\sin\theta} &= \frac{\cos\theta(1+\sin\theta) - \cos\theta(1-\sin\theta)}{(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)} \\ &= \frac{\cos\theta + \sin\theta\cos\theta - \cos\theta + \sin\theta\cos\theta}{1-\sin^2\theta} \\ &= \frac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos^2\theta} \\ &= \frac{2\sin\theta}{\cos\theta} = 2\tan\theta \end{aligned}$$

例題 9 三角測量(直角三角形的邊角關係)

- (1) 如圖(一)，直角三角形 ABC 為一座三角公園的示意圖，已知其中一邊 $\overline{BC}$ 長 50 公尺， $\angle ABC = 60^\circ$ ，試求此公園的周長為多少公尺？(5 分)
- (2) 如圖(二)，將長度為 180 公分的竹竿的一端靠在右方牆上，測得另一端與地面夾角為 53° ，試求牆的高度為多少公分？(已知 $\sin 53^\circ \approx \frac{4}{5}$) (5 分)



圖(一)



圖(二)

解

$$(1) \cos 60^\circ = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{50}{\overline{AB}} = \frac{1}{2} \quad \therefore \overline{AB} = 100$$

$$\tan 60^\circ = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AC}}{50} = \sqrt{3} \quad \therefore \overline{AC} = 50\sqrt{3}$$

故 $\triangle ABC$ 周長(即公園周長)為

$$100 + 50 + 50\sqrt{3} = 150 + 50\sqrt{3} \text{ (公尺)} \text{ (約 } 236.6 \text{ 公尺)}$$

$$(2) \text{ 設牆高為 } h \text{ 公分，則 } \sin 53^\circ = \frac{h}{180}$$

$$\Rightarrow h = 180 \sin 53^\circ \approx 180 \times \frac{4}{5} = 144$$

故牆的高度約為 144 公分

例題 10 基本測量問題

- (1) 小輝在某高塔附近 A 點測出塔頂仰角為 θ ，已知塔高 634 公尺， $\tan \theta = \frac{2}{5}$ ，試求 A 點到此高塔底部的水平距離。(5 分)
- (2) 小兔在某大樓頂測出遠處地面 P 點俯角為 ϕ ，已知 P 點距高樓底 48 公尺， $\cos \phi = \frac{4}{5}$ ，試問此大樓高度為多少公尺？(5 分)

解

$$(1) \text{ 如右圖，由題意可知 } \tan \theta = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} = \frac{634}{\overline{AB}},$$

$$\text{即 } \overline{AB} = \frac{634}{\tan \theta} = 634 \times \frac{5}{2} = 1585$$

故得 A 點到高塔底部的水平距離為 1585 公尺

- (2) 如右圖，由樓頂 R 測 P 的俯角等於 P 測樓頂 R 的仰角

$$\text{由 } \cos \phi = \frac{4}{5} \text{ 可得 } \tan \phi = \frac{3}{4}, \text{ 即 } \tan \phi = \frac{\overline{QR}}{\overline{PQ}} = \frac{\overline{QR}}{48},$$

$$\overline{QR} = 48 \tan \phi = 48 \times \frac{3}{4} = 36$$

故大樓高度為 36 公尺

