

2-2 導函數與函數圖形

重點整理

一、微分的公式

$f(x)$, $g(x)$ 為可微分函數。

1. 微分的乘法律：

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)。$$

例： $((x^2 + x + 3)(x^2 + 5x + 2))' = (2x + 1)(x^2 + 5x + 2) + (x^2 + x + 3)(2x + 5)。$

2. 微分的除法律：

$$g(x) \neq 0 \text{ 時, } \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}。$$

例： $\left(\frac{2x}{x^2 + 3}\right)' = \frac{2(x^2 + 3) - (2x)(2x)}{(x^2 + 3)^2}。$

3. 微分的連鎖律：

$$((f(x))^n)' = n(f(x))^{n-1}f'(x)。$$

例： $((x^2 + 4x + 1)^6)' = 6(x^2 + 4x + 1)^5(2x + 4)。$

4. 高階導函數：

二階導函數： $f'(x)$ 的導函數，記為 $f''(x)$ 或 $\frac{d^2}{dx^2}f(x)。$

三階導函數： $f''(x)$ 的導函數，記為 $f'''(x)$ 或 $\frac{d^3}{dx^3}f(x)。$

四階導函數： $f'''(x)$ 的導函數，記為 $f^{(4)}(x)$ 或 $\frac{d^4}{dx^4}f(x)。$

五階導函數、六階導函數、……等類推。

例： $f(x) = x^6$ ，則 $f'(x) = 6x^5$ ， $f''(x) = 30x^4$ ， $f'''(x) = 120x^3$ ， $f^{(4)}(x) = 360x^2$ ， $f^{(5)}(x) = 720x。$

二、函數的遞增與遞減

1. 遞增與遞減：

已知函數 $f(x)$ 定義在某一區間 I 上，則對任意 $x_1, x_2 \in I$ ，

(1) 當 $x_1 < x_2$ ，恆有 $f(x_1) \leq f(x_2)$ ，稱 $f(x)$ 在區間 I 為遞增函數。

(2) 當 $x_1 < x_2$ ，恆有 $f(x_1) < f(x_2)$ ，稱 $f(x)$ 在區間 I 為嚴格遞增函數。

(3) 當 $x_1 < x_2$ ，恆有 $f(x_1) \geq f(x_2)$ ，稱 $f(x)$ 在區間 I 為遞減函數。

(4) 當 $x_1 < x_2$ ，恆有 $f(x_1) > f(x_2)$ ，稱 $f(x)$ 在區間 I 為嚴格遞減函數。

2. 一階導函數與函數的遞增遞減：

已知函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，在 (a, b) 上可微。

(1) 若 $f'(x) > 0$ 在 (a, b) 都成立，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是(嚴格)遞增函數，即對任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$ ，若 $x_1 < x_2$ ，則 $f(x_1) < f(x_2)。$

(2) 若 $f'(x) < 0$ 在 (a, b) 都成立，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 是(嚴格)遞減函數，即對任意 $x_1, x_2 \in [a, b]$ ，若 $x_1 < x_2$ ，則 $f(x_1) > f(x_2)。$

三、導函數的應用

1. 凹向性與二階導函數：

設 $f(x)$ 的二階導函數存在，

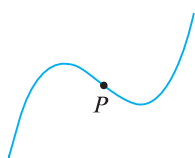
(1) 若 $f''(x)$ 在某區間中恆大於 0，則 $f(x)$ 的圖形在該區間凹口向上。

(2) 若 $f''(x)$ 在某區間中恆小於 0，則 $f(x)$ 的圖形在該區間凹口向下。

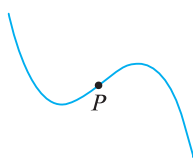
例：二次函數 $f(x) = x^2$ 圖形為開口向上的拋物線，其二階導函數對所有實數 x 而言，恆有 $f''(x) = 2 > 0$ ，可以驗證此函數凹口向上。

2. 反曲點：

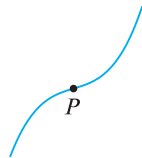
若 $f(x)$ 在 $x = c$ 處連續，且 $f(x)$ 的圖形在點 $P(c, f(c))$ 兩側的凹向相反，則稱點 $P(c, f(c))$ 為 $f(x)$ 圖形的反曲點，如圖(一)~圖(四)。



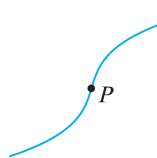
圖(一)



圖(二)



圖(三)



圖(四)

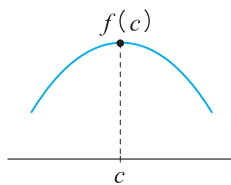
3. 函數的極值：

(1) 相對極大值與相對極小值：

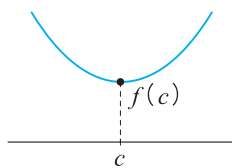
設函數 $f(x)$ 定義在開區間 I 上，且 c 為 I 中的一點。

① 若對於開區間 I 中的每一個點 x 都有 $f(c) \geq f(x)$ ，則稱 $f(c)$ 是 f 的一個相對極大值（簡稱極大值），如圖(五)。

② 若對於開區間 I 中的每一個點 x 都有 $f(c) \leq f(x)$ ，則稱 $f(c)$ 是 f 的一個相對極小值（簡稱極小值），如圖(六)。

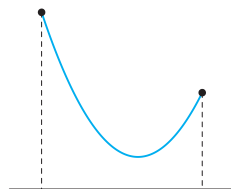


圖(五)

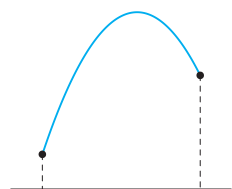


圖(六)

當 c 為函數 $f(x)$ 定義區間的端點時，若 $f(x)$ 在 c 的值比在附近的值大，則 $f(c)$ 也是 f 的一個相對極大值，如圖(七)；若 $f(x)$ 在 c 的值比在附近的值小，則 $f(c)$ 也是 f 的一個相對極小值，如圖(八)。



圖(七)



圖(八)

(2) 函數的最大值與最小值：

設 c 在函數 $f(x)$ 的定義域中，

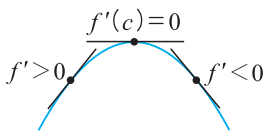
① 若對定義域中的每一個 x ，都有 $f(c) \geq f(x)$ ，則稱 $f(c)$ 為最大值。

② 若對定義域中的每一個 x ，都有 $f(c) \leq f(x)$ ，則稱 $f(c)$ 為最小值。

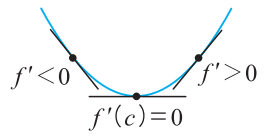
4. 函數極值的判定法：

設 $f(x)$ 為可微分函數，且 $f'(c)=0$ 。

- (1) 如果在包含 c 點的某個開區間且在定義域中，在 c 的左側有 $f' > 0$ ，右側有 $f' < 0$ ，則 $f(c)$ 是極大值，如圖(九)。
- (2) 如果在包含 c 點的某個開區間且在定義域中，在 c 的左側有 $f' < 0$ ，右側有 $f' > 0$ ，則 $f(c)$ 是極小值，如圖(十)。

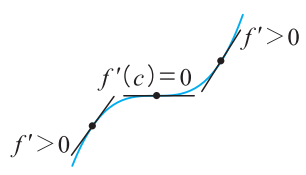


圖(九)

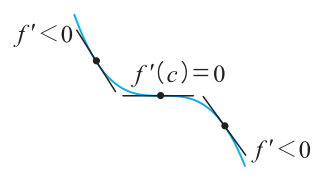


圖(十)

- (3) 如果在包含 c 點的某個開區間且在定義域中，在 c 的左右兩側 f' 同號(同正或同負)，則 $f(c)$ 不是極大值也不是極小值，如圖(十一)、圖(十二)。



圖(十一)



圖(十二)

5. 一次近似估計：

一次近似與切線的關係：

多項式函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 附近的一次近似就是 $y = f(x)$ 在點 $(a, f(a))$ 的切線所對應的函數。

四、三次函數的繪圖

三次函數 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ 的圖形分類如下：

$f'(x) = 0$	兩相異實根		兩重根		沒有實根	
判別式	$b^2 - 3ac > 0$		$b^2 - 3ac = 0$		$b^2 - 3ac < 0$	
a 的正負	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a > 0$	$a < 0$
圖形						

例題 1 微分公式的應用(一)

試求下列各函數的一階導函數：

(1) $f(x) = (x^3 + 2)(3x^2 - 2x + 1)$ 。(5 分)

(2) $g(x) = \frac{2x}{x^2 + 3}$ 。(5 分)

解 (1) $f'(x) = (x^3 + 2)'(3x^2 - 2x + 1) + (x^3 + 2)(3x^2 - 2x + 1)'$
 $= (3x^2)(3x^2 - 2x + 1) + (x^3 + 2)(6x - 2)$
 $= 9x^4 - 6x^3 + 3x^2 + 6x^4 - 2x^3 + 12x - 4$
 $= 15x^4 - 8x^3 + 3x^2 + 12x - 4$

(2) $g'(x) = \frac{(2x)'(x^2 + 3) - (2x)(x^2 + 3)'}{(x^2 + 3)^2} = \frac{2(x^2 + 3) - (2x)(2x)}{(x^2 + 3)^2}$
 $= \frac{2x^2 + 6 - 4x^2}{(x^2 + 3)^2} = \frac{-2x^2 + 6}{(x^2 + 3)^2}$

例題 2 微分公式的應用(二)

(1) 函數 $f(x) = (x^3 + 2x - 1)^5$ ，試求 $f(x)$ 在 $x = 1$ 的導數 $f'(1)$ 。(5 分)

(2) 函數 $g(x) = x^4 - x^3 - x + 1$ ，試求 $g(x)$ 的三階導函數 $g'''(x)$ 。(5 分)

解 (1) $f'(x) = 5(x^3 + 2x - 1)^4(x^3 + 2x - 1)' = 5(x^3 + 2x - 1)^4(3x^2 + 2)$
 $f'(1) = 5(1 + 2 - 1)^4(3 + 2) = 5 \times 16 \times 5 = 400$

(2) $g'''(x) = (x^4 - x^3 - x + 1)''' = (4x^3 - 3x^2 - 1)'' = (12x^2 - 6x)' = 24x - 6$

例題 3 自由落體的高度、速度與加速度

一物體自高處自由落下， t 秒後的高度可用 $f(t) = 100 - 4.9t^2$ 表示(單位：公尺)，試求：

(1) 物體落下前的高度(單位：公尺)。(3 分)

(2) 2 秒末的瞬時速度(單位：公尺/秒)。(3 分)

(3) 2 秒末的瞬時加速度(單位：公尺/秒²)。(4 分)

解 (1) 物體落下前的高度，就是 $f(0)$ ，

我們有 $f(0) = 100$ ，故知物體落下前高度為 100 公尺

(2) 位移的瞬間變化率就是瞬時速度

$\therefore f'(t) = -9.8t$ ， $f'(2) = -19.6$

$\therefore$ 2 秒末的瞬時速度為向下 19.6 公尺/秒

(3) 速度的瞬間變化率就是瞬時加速度

$\therefore f''(t) = -9.8$ ，我們有 $f''(2) = -9.8$ (公尺/秒²)

故知 2 秒末的瞬時加速度為向下 9.8 公尺/秒²

例題 4 函數的遞增遞減區間

已知三次函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 7$ ，試求：

(1) $f(x)$ 的遞增區間。(5 分)

(2) $f(x)$ 的遞減區間。(5 分)

解 $f(x)$ 的導函數 $f'(x) = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 3(x+1)(x-3)$ ，

解 $f'(x) > 0$ ，得 $x < -1$ 或 $x > 3$ ，列表如右：

由判定法可知

(1) $f(x)$ 的遞增區間為 $(-\infty, -1]$ 與 $[3, \infty)$

(2) $f(x)$ 的遞減區間為 $[-1, 3]$

x	$-1 \quad 3$				
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

例題 5 函數圖形的凹向性與反曲點

已知三次函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ ，

(1) 試討論 $f(x)$ 圖形的凹向性。(5 分)

(2) 求 $f(x)$ 圖形的反曲點坐標。(5 分)

解 $f'(x) = 3x^2 - 6x$ ， $f''(x) = 6x - 6$

解 $f''(x) = 0$ 得 $x = 1$ ，列表如右：

(1) $x < 1$ 時，圖形凹口向下

$x > 1$ 時，圖形凹口向上

(2) $f(1) = 1 - 3 + 2 = 0$

故反曲點坐標為 $(1, 0)$

x	1		
$f''(x)$	-	0	+
凹向			

例題 6 三次函數的作圖

已知三次函數 $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 18x + 5$ ，試回答下列問題：

(1) 求 $f(x)$ 的極大值。(2 分)

(2) 求 $f(x)$ 的極小值。(2 分)

(3) 求 $f(x)$ 的反曲點坐標。(2 分)

(4) 描繪此函數的圖形。(4 分)

解 令 $f'(x) = 6x^2 + 24x + 18 = 0$ ，化簡得 $x^2 + 4x + 3 = 0$ ，解得 $x = -1$ 或 -3

令 $f''(x) = 12x + 24 = 0$ ，解得 $x = -2$

參考在 $x = -1, -2, -3$ 附近的 $f'(x)$ ， $f''(x)$ 後列表並作圖如下

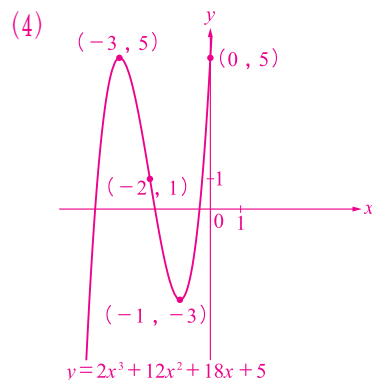
x	-3		-2		-1	
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+
增減						
凹向						
略圖						

故得

(1) $f(-3) = 5$ 為極大值

(2) $f(-1) = -3$ 為極小值

(3) $f(-2) = 1$ ，得反曲點坐標 $(-2, 1)$



例題 7 三次函數的極值

試求三次函數 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ 的極值與產生極值的 x 值。(10 分)

解 $f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x - 2)$

令 $f'(x) = 0$ ，即 $3x(x - 2) = 0$ ，解得 $x = 0$ 或 2

$f(0) = 1$ ， $f(2) = 8 - 12 + 1 = -3$ ，列表如下：

x	0		2		
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	1		-3		
增減	↗		↘		↗

故 $f(x)$ 在 $x = 0$ 有極大值 1，在 $x = 2$ 有極小值 -3

例題 8 三次函數的最大值與最小值

試求函數 $f(x) = x^3 + 6x^2 - 13$ 在區間 $[-2, 3]$ 的

(1) 最大值。(5 分)

(2) 最小值。(5 分)

解 $f'(x) = 3x^2 + 12x$ ，令 $f'(x) = 0$ ，得 $3x^2 + 12x = 0$

化簡得 $x(x + 4) = 0$ ，解得 $x = -4$ 或 0

$f(-4) = -64 + 96 - 13 = 19$ ， $f(0) = -13$ ，列表如下：

x	-4		0		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	19		-13		
增減	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

又 $f(-2) = -8 + 24 - 13 = 3$ ， $f(3) = 27 + 54 - 13 = 68$

故最大值為 68，最小值為 -13

例題 9 切線方程式與一次近似

已知 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6x + 6$ ，試求：

- (1) 三次多項式 $f(x)$ 在 $x = 2$ 附近的一次近似。(5 分)
- (2) 三次函數 $y = f(x)$ 的圖形在 $x = 2$ 時的切線方程式，並比較(1)的答案。(5 分)

解 (1) 連續利用綜合除法，將 $f(x)$ 表示成 $x - 2$ 的多項式

$$\text{得 } f(x) = (x - 2)^3 - 6(x - 2) + 2$$

$$\therefore f(x) \text{ 在 } x = 2 \text{ 附近的一次近似為 } y = -6(x - 2) + 2$$

- (2) 先求 $f(x)$ 的一階導函數 $f'(x) = 3x^2 - 12x + 6$

將 2 代入得 $f'(2) = 12 - 24 + 6 = -6$ ，即切線斜率為 -6

$x = 2$ 時， y 坐標為 $f(2) = 8 - 24 + 12 + 6 = 2$ ，切點坐標為 $(2, 2)$

故所求為 $y - 2 = -6(x - 2)$

移項得 $y = -6(x - 2) + 2$ ，與(1)的結果相同

也就是說，函數 $y = f(x)$ 的圖形在 $x = 2$ 時的切線方程式

就是多項式 $f(x)$ 在 $x = 2$ 附近的一次近似

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & -6 & +6 & +6 & 2 \\ & 2 & -8 & -4 & \\ \hline 1 & -4 & -2 & & 2 \\ & 2 & -4 & & \\ \hline 1 & -2 & & & -6 \\ & 2 & & & \\ \hline 1 & & & & 0 \end{array}$$

例題 10 判斷方程式的根

- (1) 試判斷多項式方程式 $2x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ 有幾個實根。(5 分)
- (2) 令 $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + k$ ，已知 $f(x) = 0$ 有三個相異實根，試求 k 範圍。(5 分)

解 (1) 考慮 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 3$ ， $f'(x) = 6x^2 - 6x$ ， $f''(x) = 12x - 6$

解 $f'(x) = 6x^2 - 6x = 0$ ， $6x(x - 1) = 0$ ，得 $x = 0$ 或 1

$$f(0) = 3, f(1) = 2 - 3 + 3 = 2$$

$$\text{解 } f''(x) = 12x - 6 = 0, \text{ 得 } x = \frac{1}{2}, \text{ 而 } f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2}$$

$y = f(x)$ 的概略圖形如右

$f(x) = 0$ 的實根即為圖形與 x 軸的交點

故知僅有一個實根

- (2) $f'(x) = 6x^2 + 6x - 12 = 6(x + 2)(x - 1)$

令 $f'(x) = 0$ 得 $x = -2$ 或 1

$$f(-2) = -16 + 12 + 24 + k = k + 20$$

$$f(1) = 2 + 3 - 12 + k = k - 7$$

由已知， $y = f(x)$ 的概略圖形與 x 軸的關係如右圖

故 $f(-2) > 0$ 且 $f(1) < 0$

即 $k + 20 > 0$ 且 $k - 7 < 0$

故得 $-20 < k < 7$

