1－3 函數的概念

重點整理

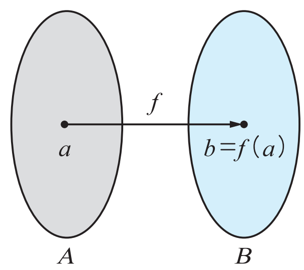
一、函數的定義

1. 當變數 y 隨著變數 x 而變化，我們稱 y 是 x 的函數，記為 $y=f(x)$，並稱 x 為自變數，y 為應變數。

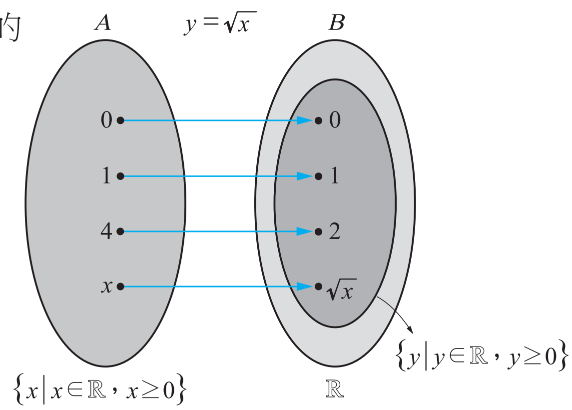
   例：水費(y)隨著用水量(x)不同而有不同的金額。
   商店營業額(y)隨著銷售量(x)而有所不同。

2. 函數的定義域、對應域與值域：

   f 是集合 A、B 中元素之間的一個對應關係。若對於集合 A 中的每個元素 a，都可以找到集合 B 中的唯一元素 b，使得 a 對應到 b，則稱 f 是 A 到 B 的一個函數，用 $f:A\to B$ 表示。b 稱為 f 在 a 的函數值，記為 $f(a)=b$。其中集合 A 稱為 f 的定義域，集合 B 稱為 f 的對應域。能夠被集合 A 中的元素對應到的集合 B 的元素所成的子集合，稱為 f 的值域。



   例：定義函數 $y=f(x)=\sqrt{x}$，則此函數的定義域為 $\{x\mid x\in\mathbb{R}，x\geq 0\}$
   （表示所有非負實數所成的集合），
   對應域為 $\mathbb{R}$
   （表示所有實數所成的集合），
   值域為 $\{y\mid y\in\mathbb{R}，y\geq 0\}$
   （表示所有非負實數所成的集合）。



二、函數的四則運算

1. 實函數 $f(x)$，$g(x)$ 透過四則運算，可以形成新的函數，定義域是 $f(x)$，$g(x)$ 的共同範圍。
2. 函數的四則運算：
   (1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$。
   (2) $(f-g)(x)=f(x)-g(x)$。
   (3) $(fg)(x)=f(x)g(x)$。
   (4) $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$，但定義域必須滿足 $g(x)\neq 0$。

   例：$f(x)=x^2+1$，$g(x)=2x$，則：
   $(f+g)(x)=x^2+1+2x=x^2+2x+1$，
   $(f-g)(x)=x^2+1-2x=x^2-2x+1$，
   $(fg)(x)=(x^2+1)(2x)=2x^3+2x$，
   $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{x^2+1}{2x}$，但 $x\neq 0$。

三、合成函數(composite function)

設 f，g 為函數，則 g 與 f 的合成函數 $g \circ f$ 的定義為 $(g \circ f)(x) = g(f(x))$。合成函數 $g \circ f$ 的定義域是使 $f(x)$ 落在 g 的定義域的所有 x 所成的集合。

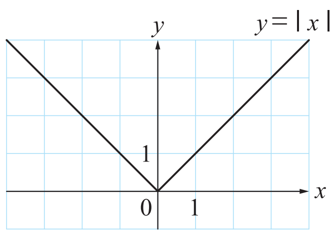
例：$f(x) = x^2$，$g(x) = 2x + 1$，則：

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = (2x + 1)^2 = 4x^2 + 4x + 1$，

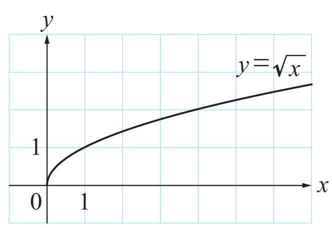
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = 2x^2 + 1$。

四、函數的圖形

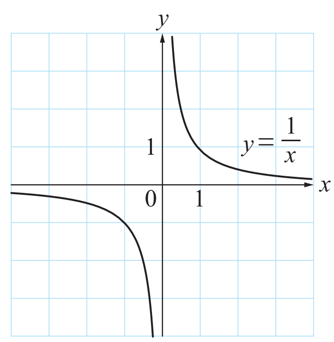
1. 對於函數 $y = f(x)$，令 x 為橫坐標，$f(x)$ 為縱坐標，則在坐標平面上所有可能的點 $(x, f(x))$ 所成的集合稱為此函數的圖形。
   因為每個 x 只有一個 y 值，所以每條鉛垂線至多與函數圖形有一個交點。
2. 常見的基本函數：
   (1) 多項式函數：$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots\cdots + a_1 x + a_0$，$a_n \neq 0$。
   例：$f(x) = 2x^3 + x^2 - 3x + 1$，$x$ 是任意實數。
   (2) 絕對值函數：$f(x) = |x| = \begin{cases} x &，x \geq 0 \\ -x &，x < 0 \end{cases}$，圖形如圖(一)。
   (3) 根式函數：$f(x) = \sqrt{x}$，$x \geq 0$，圖形如圖(二)。
   (4) 倒數函數：$f(x) = \dfrac{1}{x}$，$x \neq 0$，圖形如圖(三)。
   (5) 高斯函數：$f(x) = [x]$，$[x]$ 為小於或等於 x 的最大整數，圖形如圖(四)。
   例：$[3.1] = 3$，$[0.2] = 0$，$[-2.7] = -3$。
   (6) 標準指數函數：$f(x) = e^x$，x 是任意實數，圖形如圖(五)。
   (7) 自然對數函數：$f(x) = \log_e x = \ln x$，$x > 0$，圖形如圖(六)。



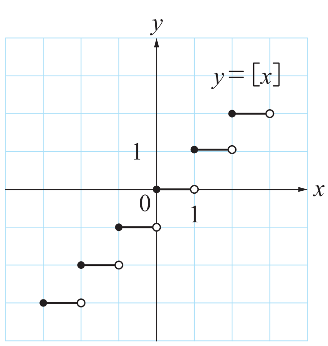
圖(一)



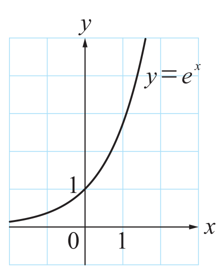
圖(二)



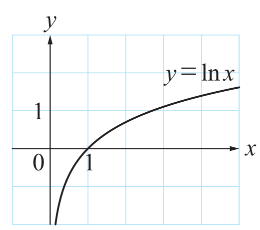
圖(三)



圖(四)



圖(五)



圖(六)

五、函數的奇偶性

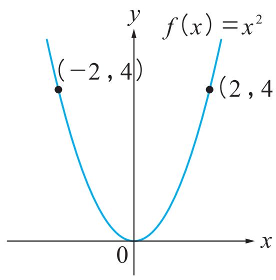
1. 偶函數：

若函數 $f(x)$ 滿足 $f(x)=f(-x)$，則稱 $f(x)$ 為偶函數，圖形對稱於 y 軸。

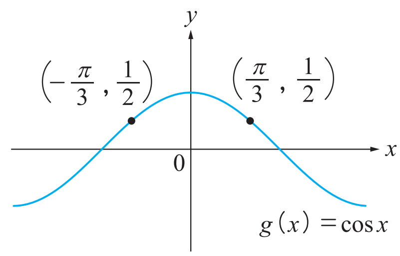
例：$f(x)=x^2$，有 $f(2)=f(-2)$，$f(-3)=f(3)$，……等，圖形如圖(七)。

$g(x)=\cos x$，有 $g\left(\frac{\pi}{3}\right)=g\left(-\frac{\pi}{3}\right)$，$g(-\pi)=g(\pi)$，……等，

圖形如圖(八)。



圖(七)



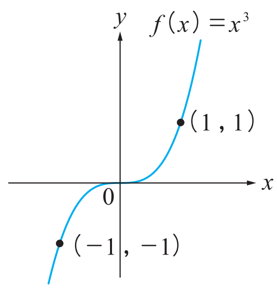
圖(八)

2. 奇函數：

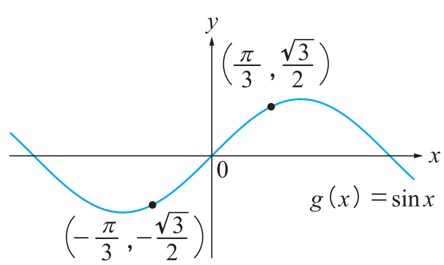
若函數 $f(x)$ 滿足 $f(-x)=-f(x)$，則稱 $f(x)$ 為奇函數，圖形對稱於原點。

例：$f(x)=x^3$，有 $f(-1)=-f(1)$，$f(-2)=-f(2)$，……等，圖形如圖(九)。

$g(x)=\sin x$，有 $g\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-g\left(\frac{\pi}{3}\right)$，$g(-\pi)=-g(\pi)$，……等，圖形如圖(十)。



圖(九)

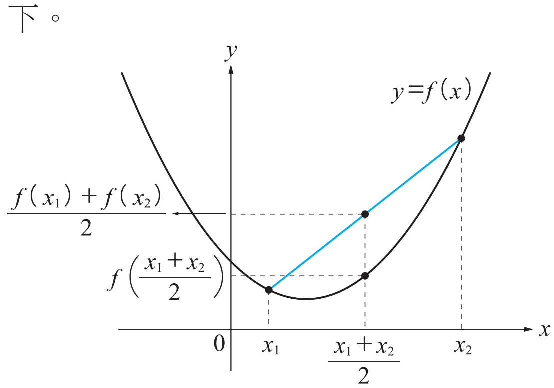


圖(十)

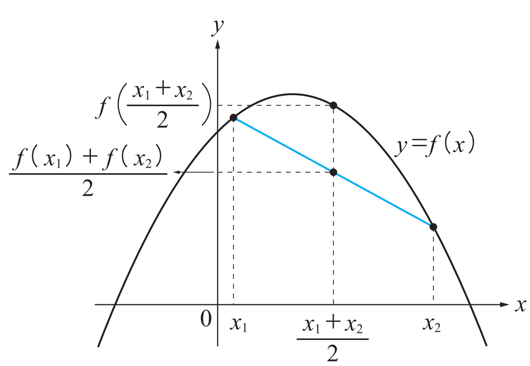
六、函數圖形的凹向性

1. 凹口向上：如圖(十一)，若 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\geq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，則稱 $f(x)$ 的圖形凹口向上。

2. 凹口向下：如圖(十二)，若 $\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}\leq f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$，則稱 $f(x)$ 的圖形凹口向下。



圖(十一)



圖(十二)

七、反函數的概念

若函數 $f：A\to B$，$g：B\to A$，並對所有的 $x\in A$，$g(f(x))=x$，且對所有的 $y\in B$，$f(g(y))=y$，則稱 $f(x)$ 與 $g(x)$ 互為反函數。

例：$f(x)=2x$，$g(x)=\frac{x}{2}$，因為 $f(g(x))=f\left(\frac{x}{2}\right)=2\left(\frac{x}{2}\right)=x$，

$g(f(x))=g(2x)=\frac{1}{2}(2x)=x$，所以 $f(x)$ 與 $g(x)$ 互為反函數。

例題 1　函數的定義域

試求下列函數的定義域：

(1) $f(x)=\frac{1}{x-1}$。（5 分）

(2) $g(x)=\sqrt{x^2-9}$。（5 分）

解 (1) 只要分母 $x-1\neq 0$，即 $x\neq 1$，$f(x)$ 都有意義

故定義域為 $\{x\,|\,x\in\mathbb{R}，x\neq 1\}$

(2) 根號內的數不能小於 0，故令 $x^2-9\geq 0$

則 $(x+3)(x-3)\geq 0$，解得 $x\leq -3$ 或 $x\geq 3$

故定義域為 $\{x\,|\,x\in\mathbb{R}，x\leq -3$ 或 $x\geq 3\}$

例題 2　函數的值域

試求下列函數的值域：

(1) $f(x)=-2x^2+4x-5$。（5 分）

(2) $g(x)=x^2+4x-2$，$-3\leq x\leq 1$。（5 分）

解 (1) $f(x)=-2(x^2-2x)-5=-2(x-1)^2-3$

故 $f(x)$ 的值域為 $\{y\,|\,y\in\mathbb{R}，y\leq -3\}$

(2) $g(x)=(x+2)^2-6$，$-3\leq x\leq 1$

當 $x=-2$ 時，$g(x)$ 有最小值 -6，且 $-3\leq x\leq 1$

$g(-3)=-5$，$g(1)=3$

得 $g(x)$ 的範圍為 $-6\leq g(x)\leq 3$

故 $g(x)$ 的值域為 $\{y\,|\,y\in\mathbb{R}，-6\leq y\leq 3\}$

例題 3　函數的四則運算

已知函數 $f(x)=3x+2$，$g(x)=\dfrac{1}{x-1}$，試求：

(1) $(f+g)(x)$。(5 分)　　(2) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)$。(5 分)

解 $f(x)$的定義域為 $\mathbb{R}$(所有實數所成的集合)，$g(x)$的定義域為$\{x\,|\,x\in\mathbb{R}，x\neq 1\}$
這兩個定義域的交集為$\{x\,|\,x\in\mathbb{R}，x\neq 1\}$

(1) $(f+g)(x)=3x+2+\dfrac{1}{x-1}=\dfrac{3x^2-x-2+1}{x-1}=\dfrac{3x^2-x-1}{x-1}$

定義域為$\{x\,|\,x\in\mathbb{R}，x\neq 1\}$

(2) $\left(\dfrac{g}{f}\right)(x)=\dfrac{\frac{1}{x-1}}{3x+2}=\dfrac{1}{(3x+2)(x-1)}$，定義域為$\left\{x\,\middle|\,x\in\mathbb{R}，x\neq-\dfrac{2}{3}\text{ 且 }x\neq 1\right\}$

例題 4　合成函數

設函數 $f(x)=\sqrt{x}$，$g(x)=10x$，試求：

(1) $(g\circ f)(x)$。(5 分)

(2) $(f\circ g)(x)$。(5 分)

解 (1) $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(\sqrt{x})=10\sqrt{x}$

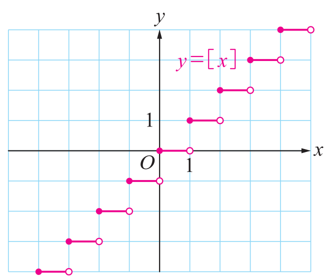
(2) $(f\circ g)(x)=f(g(x))=f(10x)=\sqrt{10x}$

例題 5　利用基本函數圖形作函數圖形(一)

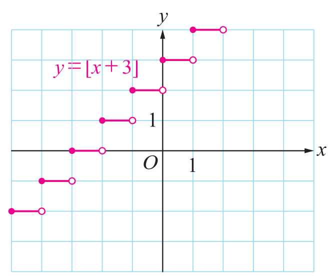
(1) 描繪高斯函數 $f(x)=[x]$ 的圖形。(4 分)

(2) 利用函數 $f(x)=[x]$ 的圖形描繪函數 $f(x)=[x+3]$ 的圖形。(4 分)

解 (1)



(2)



(1) 根據高斯函數的定義 $f(x)=[x]$ 為小於或等於 x 的最大整數，

$$\text{也就是 } f(x)=\begin{cases}\vdots \\ 2，2\le x<3 \\ 1，1\le x<2 \\ 0，0\le x<1 \\ -1，-1\le x<0 \\ -2，-2\le x<-1 \\ \vdots\end{cases}\text{，圖形如上}$$

(2) $f(x)=[x+3]$ 的圖形為 $f(x)=[x]$ 的圖形向左平移 3 單位
利用(1)所得圖形，作 $f(x)=[x+3]$ 的圖形如上

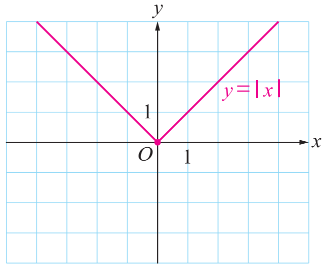
1-3

例題 6　利用基本函數圖形作函數圖形(二)

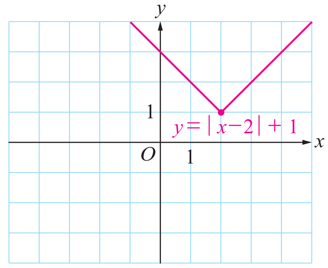
(1) 描繪絕對值函數 $f(x)=|x|$ 的圖形。（4 分）

(2) 利用函數 $f(x)=|x|$ 的圖形描繪函數 $f(x)=|x-2|+1$ 的圖形。（4 分）

解 (1)



(2)



(1) 根據絕對值函數的定義，$f(x)=\begin{cases} x &, x\geq 0 \\ -x &, x<0 \end{cases}$，圖形如上

(2) $f(x)=|x-2|+1$ 的圖形為 $f(x)=|x|$ 的圖形向右平移 2 單位，向上平移 1 單位
利用(1)所得圖形，作 $f(x)=|x-2|+1$ 的圖形如上

例題 7　利用基本函數圖形作函數圖形(三)

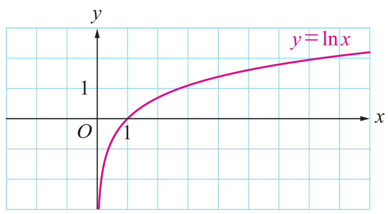
(1) 根據自然對數函數 $f(x)=\ln x$ 的定義，按計算機取值（四捨五入至小數點後第二位）如下表：

x	0.1	0.5	1	2	3	4	5	10	15	20
$\ln x$	−2.30	−0.69	0	0.69	1.10	1.39	1.61	2.30	2.71	3.00

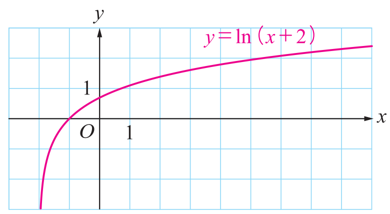
試描繪自然對數函數 $f(x)=\ln x$ 的圖形。（4 分）

(2) 利用函數 $f(x)=\ln x$ 的圖形描繪函數 $f(x)=\ln(x+2)$ 的圖形。（4 分）

解 (1)



(2)



(1) 依序描繪在圖中並用平滑曲線連接起來，可得圖形如上

(2) $f(x)=\ln(x+2)$ 的圖形為 $f(x)=\ln x$ 的圖形向左平移 2 單位
利用(1)所得圖形，作 $f(x)=\ln(x+2)$ 的圖形如上

例題 8　函數的奇偶性

⑴ 試說明 $f(x)=2x^3-x$ 是奇函數。（5 分）

⑵ 試說明 $g(x)=\cos x$ 是偶函數。（5 分）

解 ⑴ $\because f(-x)=2(-x)^3-(-x)=-2x^3+x=-(2x^3-x)=-f(x)$

$\therefore f(x)$是奇函數

⑵ $\because g(-x)=\cos(-x)=\cos x=g(x)$

$\therefore g(x)$是偶函數

例題 9　反函數

⑴ 試求 $f(x)=10\sqrt{x}$ 的反函數。（5 分）

⑵ 試求 $g(x)=3x-5$ 的反函數。（5 分）

解 ⑴ 令 $y=10\sqrt{x}$ ，兩邊平方得 $y^2=100x$

移項得 $x=\dfrac{y^2}{100}$，故得到反函數為 $y=\dfrac{x^2}{100}$，$x\geq 0$

⑵ 令 $y=3x-5$，移項得 $3x=y+5$，化簡得 $x=\dfrac{y+5}{3}$

故得到反函數為 $y=\dfrac{x+5}{3}$

1-3

翰林用心教師用精益求精

例題 10 分段定義函數

某市自來水費每 2 個月收費一次，應繳總金額 = 用水費 + 基本費，其中用水費的單價依用水量多寡而不同，如下表（1 度 = 1 立方公尺，其中度為整數）：

用水量級別	一	二	三	四	五
用水量（度）	0～20	21～60	61～200	201～1000	1001 以上
每度單價	5.0	6.7	8.5	14.0	20.0
累進差額（元）	—	34.0	142.0	1242.0	7242.0

舉例說明：裝設 25 mm 口徑水表的用戶，前兩個月用水 30 度，則應繳費用為

① 用水費：每度單價（依用水量級別而異）× 用水量 − 累進差額，
用水 30 度屬於第二級用水量，用水費為 $6.7 \times 30 - 34 = 167$（元）。

② 基本費：依水表口徑收費，
裝設 25 mm 口徑水表的用戶每 2 個月基本費是 252 元。

故應繳總金額 $= 167 + 252 = 419$（元）。

假設小倫家裡裝設的水表口徑為 25 mm，請根據上述資料，回答以下問題：

(1) 將小倫每兩個月應繳水費 y 表示成用水量 x 的函數 $f(x)$。（10 分）

(2) 假設小倫家裡前兩個月用水量 40 度，則他應繳總金額為多少元？（6 分）

解

(1) 由已知條件得 $y = f(x) = \begin{cases} 5x + 252 & ，0 \le x \le 20 \\ 6.7x - 34 + 252 & ，21 \le x \le 60 \\ 8.5x - 142 + 252 & ，61 \le x \le 200 \\ 14x - 1242 + 252 & ，201 \le x \le 1000 \\ 20x - 7242 + 252 & ，x \ge 1001 \end{cases}$

整理得 $y = f(x) = \begin{cases} 5x + 252 & ，0 \le x \le 20 \\ 6.7x + 218 & ，21 \le x \le 60 \\ 8.5x + 110 & ，61 \le x \le 200 \\ 14x - 990 & ，201 \le x \le 1000 \\ 20x - 6990 & ，x \ge 1001 \end{cases}$

(2) $f(40) = 6.7 \times 40 + 218 = 486$（元）