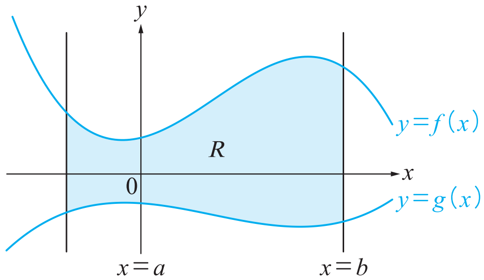
# 3-2 積分的應用

## 重點整理

### 一、兩函數圖形所圍區域的面積

假設在 $[a, b]$ 之中，連續函數 $f(x) \geq g(x)$，則在 $[a, b]$ 之間，兩函數圖形所圍面積為 $\int_a^b (f(x) - g(x))dx$。




**例**：函數 $f(x) = x^2 - 2x - 2$，$g(x) = -3x^3 + x^2 + 10x - 2$，已知在 $[-2, 0]$ 之中，$f(x) \geq g(x)$，則 $[-2, 0]$ 之間，$f(x)$ 與 $g(x)$ 圖形所圍的面積為

$$\int_{-2}^{0} (f(x) - g(x))dx = \int_{-2}^{0} (3x^3 - 12x)dx = \left(\frac{3}{4}x^4 - 6x^2\right)\Bigg|_{-2}^{0} = 12。$$

### 二、圓面積

半徑為 $r$ 的圓面積是 $\pi r^2$。

### 三、區間內函數值的平均

函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上連續，則 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 內的平均值為 $\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$。

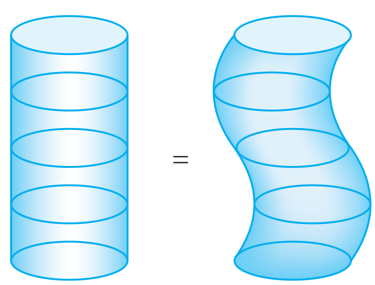
**例**：$f(x) = x^2$ 在區間 $[0, 2]$ 內的平均值為 $\dfrac{1}{2-0}\displaystyle\int_0^2 x^2 dx = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 = \dfrac{4}{3}$。

### 四、立體體積

1. 立體體積：

(1) 祖暅原理：

兩個高度相同但形狀不同的立體，若截面面積處處相等，則體積相等。




(2) 角錐的體積：底面為邊長 $a$ 的正方形，高為 $h$ 的四角錐，體積為 $\dfrac{1}{3}a^2h$。

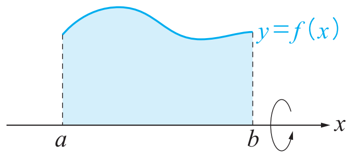
一般而言，角錐的體積 $= \dfrac{1}{3} \times$（角柱的體積）。

**例**：底面為邊長 6 的正方形，高為 8 的四角錐，體積為 $\dfrac{1}{3} \times 6^2 \times 8 = 96$。

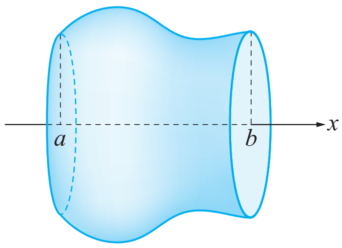
2. 旋轉體體積：

(1) 旋轉體體積公式：

在 $[a, b]$ 中，$f(x) \geq 0$，則 $y=f(x)$ 的圖形在 $x=a$，$x=b$，$x$ 軸所圍之區域，繞 $x$ 軸旋轉而成之旋轉體體積為 $\int_a^b \pi(f(x))^2\,dx$。




⇒




繞 $x$ 軸旋轉

**例**：$y=x^2$ 的圖形介於 $x=1$，$x=3$ 與 $x$ 軸所圍成的區域，繞 $x$ 軸旋轉之體積為 $\int_1^3 \pi(x^2)^2\,dx = \dfrac{242\pi}{5}$。

(2) 球體積：

半徑為 $r$ 的球體積為 $\dfrac{4}{3}\pi r^3$。

**例**：半徑為 3 的球，體積為 $\dfrac{4}{3}\pi \times 3^3 = 36\pi$。

## 五、重力加速度

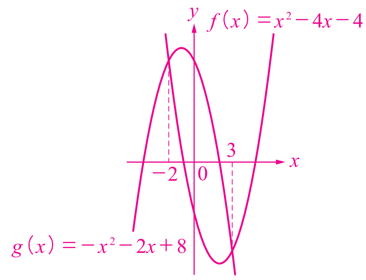
位移對時間的變化率是速度，速度對時間的變化率是加速度。

反之，加速度的反導函數是速度，速度的反導函數是位置。

## 例題 1　兩函數圖形所圍區域的面積㈠

試求兩函數 $f(x)=x^2-4x-4$ 與 $g(x)=-x^2-2x+8$ 的圖形所圍區域的面積。（10 分）

**解** 首先，作 $f(x)$ 與 $g(x)$ 圖形如右




其次，求 $f(x)$ 與 $g(x)$ 圖形的交點 $x$ 坐標

令 $x^2-4x-4=-x^2-2x+8$，移項得 $2x^2-2x-12=0$

化簡得 $x^2-x-6=0$，解之得 $x=-2$ 或 $3$

由圖形可知 $[-2，3]$ 之間 $g(x)\geq f(x)$

$g(x)-f(x)=-2x^2+2x+12$，故所求為

$$\int_{-2}^{3}(-2x^2+2x+12)\,dx=\left(-\frac{2}{3}x^3+x^2+12x\right)\Big|_{-2}^{3}$$

$$=(-18+9+36)-\left(\frac{16}{3}+4-24\right)$$

$$=27-\left(-\frac{44}{3}\right)=\frac{125}{3}$$

3-2

## 例題 2　兩函數圖形所圍區域的面積㈡

試求兩函數 $f(x)=x^3-x^2-4x-2$ 與 $g(x)=x^2+4x-2$ 的圖形所圍區域的面積。（10 分）

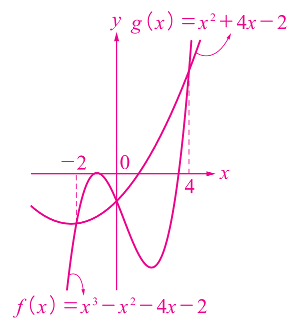
**解** 首先求兩函數圖形的交點，令 $f(x)=g(x)$，即

$x^3-x^2-4x-2=x^2+4x-2$，移項整理得 $x^3-2x^2-8x=0$

因式分解得 $x(x+2)(x-4)=0$，故得 $x=-2$ 或 $0$ 或 $4$

這表示在 $[-2，0]$ 與 $[0，4]$ 中，$f(x)\geq g(x)$ 或 $f(x)\leq g(x)$

我們先用 $f(x)-g(x)$ 積分，再取其絕對值相加即可




$f(x)-g(x)=x^3-2x^2-8x$

$$\int_{-2}^{0}(x^3-2x^2-8x)\,dx=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-4x^2\right)\Big|_{-2}^{0}=\frac{20}{3}$$

$$\int_{0}^{4}(x^3-2x^2-8x)\,dx=\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{2}{3}x^3-4x^2\right)\Big|_{0}^{4}=-\frac{128}{3}$$

故所求為 $\frac{20}{3}+\frac{128}{3}=\frac{148}{3}$

## 例題 3 圓面積公式的應用

某蔥油餅攤位賣三種尺寸的圓形蔥油餅，直徑分別是 9 吋、13 吋與 18 吋，厚度都相同。試問：

⑴ 直徑 18 吋的蔥油餅面積是直徑 9 吋的幾倍？（5 分）

⑵ 如果蔥油餅的售價與面積成正比，已知 9 吋蔥油餅定價 60 元，那麼 13 吋的蔥油餅應該定價多少元？（四捨五入至整數位）（5 分）

解 ⑴ 直徑為 18 吋、9 吋，則半徑為 9 吋、$\frac{9}{2}$ 吋，故所求為 $\dfrac{9^2\pi}{\left(\frac{9}{2}\right)^2\pi}=4$（倍）

⑵ 設 13 吋的蔥油餅定價 $x$ 元，則 $\dfrac{x}{60}=\dfrac{\left(\frac{13}{2}\right)^2\pi}{\left(\frac{9}{2}\right)^2\pi}$，解之得 $x=125.1\cdots\cdots\approx125$（元）

## 例題 4 區間內函數值的平均㈠

定義函數 $f(x)=2x^2+3$，試求 $f(x)$ 在區間 $[1,4]$ 內的平均值。（5 分）

解
$$\frac{1}{4-1}\int_1^4(2x^2+3)\,dx=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}x^3+3x\right)\Big|_1^4=\frac{1}{3}\left(\left(\frac{2}{3}\times64+12\right)-\left(\frac{2}{3}+3\right)\right)$$
$$=\frac{1}{3}\left(\frac{164}{3}-\frac{11}{3}\right)=17$$

## 例題 5 區間內函數值的平均㈡

已知某地某日溫度可用函數 $f(t)=-3t^2+20t+8$（°C），$0\le t\le6$ 表示，其中 $t$ 表示自某時刻經過的小時數，試求在 3 到 6 小時這段區間內，當地的平均氣溫。（5 分）

解 函數 $f(t)=-3t^2+20t+8$ 在 $[0,6]$ 連續

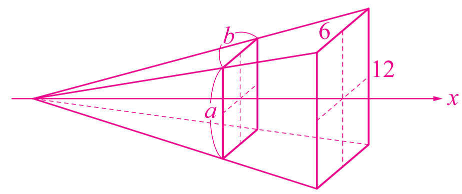
故 $f(t)$ 在 $[3,6]$ 的平均值為

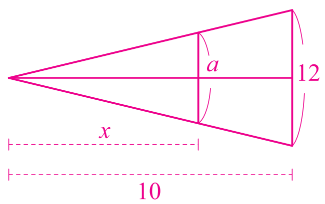
$$\frac{1}{6-3}\int_3^6(-3t^2+20t+8)\,dt=\frac{1}{3}\left(-t^3+10t^2+8t\right)\Big|_3^6$$
$$=\frac{1}{3}\left(-(6^3-3^3)+10(6^2-3^2)+8(6-3)\right)$$
$$=\frac{1}{3}(-189+270+24)$$
$$=35\ (°C)$$

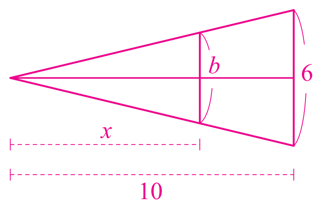
## 例題 6　角錐的體積

有一高為 10，底面為矩形的角錐，底面矩形的長為 12、寬為 6，試求此角錐的體積。（10 分）

**解** 如右略圖，將角錐頂點對準原點，高落在 $x$ 軸正向上
則角錐是介於 $x=0$ 和 $x=10$ 的一塊立體
這個角錐的截面是一個矩形，長與寬會隨 $x$ 而變動




如上略圖，設截面的長與寬分別為 $a$ 與 $b$

我們有 $\dfrac{a}{x}=\dfrac{12}{10}$，$\dfrac{b}{x}=\dfrac{6}{10}$，解得 $a=\dfrac{6x}{5}$，$b=\dfrac{3x}{5}$

截面的面積為 $ab=\dfrac{6x}{5}\times\dfrac{3x}{5}=\dfrac{18}{25}x^2$

故得角錐體積為 $\displaystyle\int_0^{10}\left(\frac{18}{25}x^2\right)dx=\frac{6}{25}x^3\Big|_0^{10}=240$

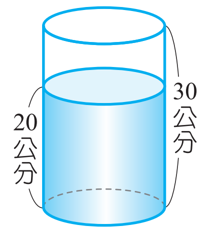
## 例題 7　旋轉體體積

試求函數 $y=x^3$ 的圖形介於 $x=0$，$x=2$ 與 $x$ 軸所圍的區域，繞 $x$ 軸旋轉的旋轉體體積。（10 分）

**解** 所求體積為 $\displaystyle\int_0^2\pi\left(x^3\right)^2dx=\int_0^2\pi x^6\,dx=\left(\frac{\pi}{7}x^7\right)\Big|_0^2=\frac{128\pi}{7}$

## 例題 8　球的體積

右圖是一個內部高 30 公分、半徑 10 公分的直圓柱型玻璃瓶，盛水高度為 20 公分。小輝將 30 個半徑為 2 公分的鋼珠置入瓶中，試問瓶內的水面會上升多少公分？（10 分）




**解** 假設杯內水面上升 $x$ 公分

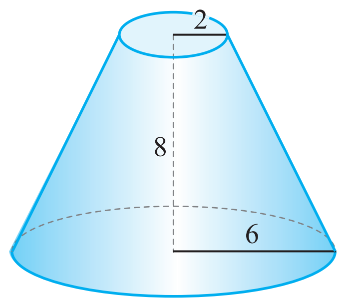
∵水面上升所增加的體積等於 30 個鋼珠的體積

∴ $10^2\pi x = 30 \times \dfrac{4\pi}{3} \times 2^3$，解得 $x = 3.2$

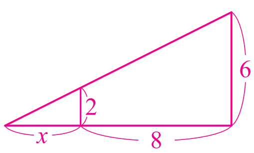
故水面上升 3.2 公分

## 例題 9　直圓錐體的體積

如右圖，圓錐臺頂面半徑為 2，底面半徑為 6，高度為 8，試求此圓錐臺的體積。（10 分）




**解**




如上圖，$\dfrac{x+8}{6} = \dfrac{x}{2}$，解得 $x = 4$

所求圓錐臺體積為

底面圓半徑 6、高為 12 的圓錐體積 − 底面圓半徑 2、高為 4 的圓錐體積

即 $\dfrac{1}{3}\pi \times 6^2 \times 12 - \dfrac{1}{3}\pi \times 2^2 \times 4 = \dfrac{416\pi}{3}$

## 例題 10 加速度運動（自由落體）

在 9000 公尺的高空，有一物體以 0 公尺／秒的初速度向地面落下，過程中只受重力加速度的影響。若 $t$ 秒後距離地面高度為 $f(t)$ 公尺，試求：

(1) $f(t)$。（10 分）

(2) 20 秒後的高度。（5 分）

(3) 幾秒後物體落至地面？（5 分）

提示：重力加速度 $g = 9.8$ 公尺／秒$^2$。$f(0) = 9000$，$f'(0) = 0$，$f''(t) = -9.8$。

**解** (1) ∵速度是加速度的反導函數　∴ $f'(t) = f'(0) + \int_0^t f''(x)\,dx$

即 $f'(t) = 0 + \int_0^t (-9.8)\,dx = (-9.8x)\Big|_0^t = -9.8t$

又 $f(t)$ 是 $f'(t)$ 的反導函數　∴ $f(t) = f(0) + \int_0^t f'(x)\,dx$

得 $f(t) = 9000 + \int_0^t (-9.8x)\,dx = 9000 + (-4.9x^2)\Big|_0^t = 9000 - 4.9t^2$

(2) $f(20) = 9000 - 4.9 \times 20^2 = 9000 - 1960 = 7040$（公尺）

(3) 落至地面則高度為 0，即 $f(t) = 0$

得 $9000 - 4.9t^2 = 0$，移項得 $4.9t^2 = 9000$，解得 $t = \dfrac{300}{7}$（秒）