

1-2 無窮等比級數

重點整理

一、 Σ 的意義與性質

1. Σ 的意義：

級數可以用 Σ 表示 (Σ 是希臘字母，讀作 sigma，是相加的意思)。

$\sum_{k=m}^n a_k$ ：將 k 從 m 變動到 n ，依序代入 a_k 後，全部加起來，其中 k 稱為指標， m 、 n 是正整數且 $m \leq n$ 。

例： $\sum_{k=1}^4 k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$ 。令 $k = 1, 2, 3, 4$ ，分別代入 k^2 ，得 $1^2, 2^2, 3^2, 4^2$ ，再相加即可。

例： $\sum_{k=1}^5 (2k+1) = 3 + 5 + 7 + 9 + 11$ 。令 $k = 1, 2, 3, 4, 5$ ，分別代入 $2k+1$ ，得 $3, 5, 7, 9, 11$ ，再相加即可。

2. Σ 的運算性質：

(1) 若 c 為常數，則 $\sum_{k=1}^n c = nc$ 。

例： $\sum_{k=1}^6 3 = 6 \times 3 = 18$ 。

(2) $\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$ 。

例： $\sum_{k=1}^{10} a_k = 100$ ， $\sum_{k=1}^{10} b_k = 200$ ，則 $\sum_{k=1}^{10} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k = 100 + 200 = 300$ 。

(3) 若 c 為常數，則 $\sum_{k=1}^n ca_k = c \sum_{k=1}^n a_k$ 。

例： $\sum_{k=1}^n (3k) = 3 \sum_{k=1}^n k$ 。

3. 三個求和公式：

(1) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ 。

例： $\sum_{k=1}^{30} k = \frac{30 \times 31}{2} = 465$ 。

(2) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ 。

例： $\sum_{k=1}^{10} k^2 = \frac{10 \times 11 \times 21}{6} = 385$ 。

(3) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \sum_{k=1}^n k^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$ 。

例： $1^3 + 2^3 + \cdots + 12^3 = \left(\frac{12 \times 13}{2} \right)^2 = 78^2 = 6084$ 。

二、無窮級數的和

1. 無窮級數：

由無窮數列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ 所成的無窮級數為

$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ ，此級數亦可用 Σ 符號寫為 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 。

例： $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)$ 。

2. 無窮級數求和：

給定無窮級數 $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ ，令 $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ 為其前 n 項的部分和。

若部分和數列 $\langle S_n \rangle$ 有極限 L ，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = L$ ，則稱此級數收斂或和存在，且其和為 L ，否則稱此級數發散或和不存在。

例：試求無窮級數 $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$ 之和。

$$\text{令 } S_n = \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)}$$

$$\text{則 } S_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

$$\text{取極限得 } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1 - 0 = 1, \text{ 故此無窮級數之和為 } 1。$$

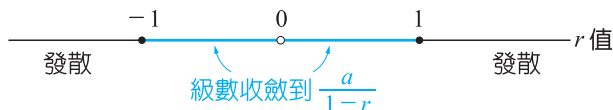
三、無窮等比級數與循環小數

1. 無窮等比級數：

無窮等比級數 $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots + ar^{n-1} + \dots$ ，其中首項 $a \neq 0$ ，公比 $r \neq 0$ ，則：

(1) 當 $-1 < r < 1$ 時，此級數收斂，其和 $S = \frac{a}{1-r}$ 。

(2) 當 $|r| \geq 1$ 時，此級數發散。



例： $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{n-1}} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$

(公比 $r = \frac{1}{3}$ ，滿足 $-1 < r < 1$)。

例：無窮等比級數 $2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^n + \dots$

$\because$ 公比 $r = 2 > 1 \quad \therefore$ 此級數發散。

2. 有理數的小數表示：

(1) 有理數可化為有限小數或循環小數。

$$\text{例：} \frac{3}{4} = 0.75, \frac{2}{3} = 0.\bar{6}, \frac{5}{18} = 0.2\bar{7}。$$

(2) 有限小數可化為有理數。

$$\text{例：} 0.437 = \frac{437}{1000}, 0.29 = \frac{29}{100}。$$

(3) 循環小數可表示為無窮等比級數的形式，並可化為有理數。

$$\text{例：} 0.\overline{35} = 0.35 + 0.0035 + 0.000035 + \cdots = \frac{35}{100} + \frac{35}{10000} + \frac{35}{1000000} + \cdots$$

$$= \frac{\frac{35}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{35}{99}。$$

例題 1 級數展開並求值

試展開下列級數，並求其值：

$$(1) \sum_{k=1}^5 (3k+1)。(5 \text{ 分})$$

$$(2) \sum_{k=3}^6 (2k-1)。(5 \text{ 分})$$

$$\text{解 } (1) \sum_{k=1}^5 (3k+1) = 4 + 7 + 10 + 13 + 16 = 50$$

$$(2) \sum_{k=3}^6 (2k-1) = 5 + 7 + 9 + 11 = 32$$

例題 2 以 Σ 表示級數試將下列級數用 Σ 表示：

(1) 等差級數，首項為 5，公差為 3，最後一項為 119。(5 分)

(2) 等比級數，首項為 2，公比為 3，共有 20 項。(5 分)

$$\text{解 } (1) \text{ 此級數一般項為 } a_k = 5 + 3(k-1) = 3k + 2$$

$$\text{最後一項 } a_n = 119 = a_1 + 3(n-1) = 5 + 3(n-1)$$

$$\text{得 } 114 = 3(n-1)$$

$$\Rightarrow n-1 = 38, n = 39$$

$$\therefore \text{此級數可表示為 } \sum_{k=1}^{39} (3k+2)$$

$$(2) \text{ 此級數一般項為 } a_k = ar^{k-1} = 2 \times 3^{k-1}$$

$$\therefore \text{此級數可表示為 } \sum_{k=1}^{20} 2 \times 3^{k-1}$$

例題 3 Σ 的運算性質

已知 $\sum_{k=1}^{10} a_k = 20$ ， $\sum_{k=1}^{10} b_k = 35$ ，試求：

(1) $\sum_{k=1}^{10} (3a_k - 2)$ 。(5 分)

(2) $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + b_k - 1)$ 。(5 分)

解 (1) $\sum_{k=1}^{10} (3a_k - 2)$

$$= \sum_{k=1}^{10} (3a_k) - \sum_{k=1}^{10} 2$$

$$= 3 \sum_{k=1}^{10} a_k - 10 \times 2$$

$$= 3 \times 20 - 20$$

$$= 40$$

(2) $\sum_{k=1}^{10} (2a_k + b_k - 1)$

$$= 2 \sum_{k=1}^{10} a_k + \sum_{k=1}^{10} b_k - \sum_{k=1}^{10} 1$$

$$= 2 \times 20 + 35 - 10 \times 1$$

$$= 65$$

例題 4 Σ 求和公式的應用

試求下列各級數的和：

(1) $\sum_{k=1}^{20} k$ 。(5 分)

(2) $\sum_{k=6}^{15} k^2$ 。(5 分)

解 (1) $\sum_{k=1}^{20} k = \frac{20 \times 21}{2} = 210$

(2) $\sum_{k=6}^{15} k^2 = \sum_{k=1}^{15} k^2 - \sum_{k=1}^5 k^2$

$$= \frac{15 \times 16 \times 31}{6} - \frac{5 \times 6 \times 11}{6}$$

$$= 1240 - 55 = 1185$$

例題 5 Σ 公式及運算性質的應用

試求下列各級數的和：

(1) $1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \cdots + 39 \times 41$ 。(5 分)

(2) $1 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + 3 \times 4^2 + \cdots + 10 \times 11^2$ 。(5 分)

解 (1) 觀察此級數每一項都是 $(2k-1)(2k+1)$ 的形式，且 k 從 1 變動到 20，故得

$$\begin{aligned} & 1 \times 3 + 3 \times 5 + 5 \times 7 + \cdots + 39 \times 41 \\ &= \sum_{k=1}^{20} (2k-1)(2k+1) = \sum_{k=1}^{20} (4k^2 - 1) = 4 \sum_{k=1}^{20} k^2 - \sum_{k=1}^{20} 1 \\ &= 4 \times \frac{20 \times 21 \times 41}{6} - 20 \times 1 \\ &= 11480 - 20 = 11460 \end{aligned}$$

(2) 觀察此級數每一項都是 $k(k+1)^2$ 的形式，且 k 從 1 變動到 10，故得

$$\begin{aligned} & 1 \times 2^2 + 2 \times 3^2 + 3 \times 4^2 + \cdots + 10 \times 11^2 \\ &= \sum_{k=1}^{10} k(k+1)^2 = \sum_{k=1}^{10} k(k^2 + 2k + 1) = \sum_{k=1}^{10} (k^3 + 2k^2 + k) = \sum_{k=1}^{10} k^3 + 2 \sum_{k=1}^{10} k^2 + \sum_{k=1}^{10} k \\ &= \left(\frac{10 \times 11}{2} \right)^2 + 2 \times \frac{10 \times 11 \times 21}{6} + \frac{10 \times 11}{2} \\ &= 3025 + 770 + 55 \\ &= 3850 \end{aligned}$$

例題 6 無窮級數求和

試求下列無窮級數的前 n 項部分和 S_n ，若無窮級數可求和，則求出此和。

(1) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + \cdots$ 。(5 分)

(2) $1 + 3 + 7 + 15 + \cdots + (2^n - 1) + \cdots$ 。(5 分)

解 (1) $S_n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots + \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

$$= \frac{1 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right]}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = 3 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[3 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 3 - 0 = 3$$

$\therefore$ 此無窮級數之和為 3

$$\begin{aligned} (2) \quad S_n &= (2^1 - 1) + (2^2 - 1) + (2^3 - 1) + \cdots + (2^n - 1) \\ &= (2 + 2^2 + \cdots + 2^n) - (1 + 1 + \cdots + 1) \\ &= \frac{2(2^n - 1)}{2 - 1} - n = 2^{n+1} - 2 - n \end{aligned}$$

$\therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 不存在 $\therefore$ 此無窮級數無法求和

例題 7 極限的計算

試求下列極限：

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2)} \circ (5 \text{ 分})$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}} \circ (5 \text{ 分})$$

解

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + n}{1 + 4 + 7 + \cdots + (3n - 2)}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{n((3n-2)+1)}{2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n(3n-1)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{3n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{3 - \frac{1}{n}} = \frac{1}{3}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

$$= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)} = \frac{\frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)}}{\frac{1}{1 - \frac{1}{2}}} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{1}} = \frac{3}{8}$$

例題 8 無窮等比級數求和(一)

$$(1) \text{ 試求無窮等比級數 } \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{1}{4}\right)^n + \cdots \text{ 的和。} (5 \text{ 分})$$

$$(2) \text{ 試求無窮等比級數 } 1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \frac{27}{64} + \cdots \text{ 的和。} (5 \text{ 分})$$

解

$$(1) \text{ 首項 } \frac{1}{4}, \text{ 公比 } r = \frac{1}{4}$$

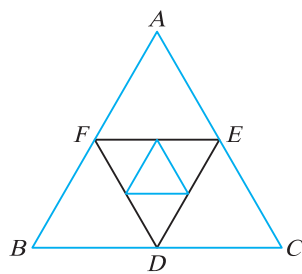
$$\text{由求和公式得 } \frac{\frac{1}{4}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3}$$

$$(2) \text{ 首項 } 1, \text{ 公比 } r = -\frac{3}{4}$$

$$\text{由求和公式得 } \frac{1}{1 - \left(-\frac{3}{4}\right)} = \frac{4}{7}$$

例題 9 無窮等比級數求和(二)

如右圖， $\triangle ABC$ 是一個邊長為 6 的正三角形。連接 $\triangle ABC$ 各邊的中點，可得一個內接三角形，重複這樣的步驟會得到無窮多個內接三角形。試求：



(1) 所有正三角形的周長之和。(5 分)

(2) 所有正三角形的面積之和。(5 分)

解 (1) 第一個三角形邊長為 6，周長為 18

第二個三角形邊長為 3，周長為 9

第三個三角形邊長為 $\frac{3}{2}$ ，周長為 $\frac{9}{2}$

以此類推，這些三角形周長是無窮等比數列 $18, 9, \frac{9}{2}, \dots$

首項為 18，公比為 $\frac{1}{2}$ ，所以其和為 $\frac{18}{1 - \frac{1}{2}} = 36$

(2) 第一個三角形面積為 $\frac{1}{2} \times 6 \times 6 \times \sin 60^\circ = 9\sqrt{3}$

第二個三角形面積為 $\frac{1}{2} \times 3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{4}$

第三個三角形面積為 $\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{16}$

以此類推，這些三角形面積是無窮等比數列 $9\sqrt{3}, \frac{9\sqrt{3}}{4}, \frac{9\sqrt{3}}{16}, \dots$

首項為 $9\sqrt{3}$ ，公比為 $\frac{1}{4}$ ，所以其和為 $\frac{9\sqrt{3}}{1 - \frac{1}{4}} = 12\sqrt{3}$

例題 10 將循環小數化為分數

試將下列循環小數化為分數：

(1) $3.\overline{8}$ 。(5 分)

(2) $0.8\overline{76}$ 。(5 分)

解 (1) $3.\overline{8} = 3.888\dots = 3 + 0.8 + 0.08 + 0.008 + \dots$

$$= 3 + \frac{8}{10} + \frac{8}{100} + \frac{8}{1000} + \dots = 3 + \frac{\frac{8}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 3 + \frac{8}{9} = \frac{35}{9}$$

(2) $0.8\overline{76} = 0.8767676\dots = 0.8 + 0.076 + 0.00076 + 0.0000076 + \dots$

$$\begin{aligned} &= \frac{8}{10} + \frac{76}{1000} + \frac{76}{100000} + \frac{76}{10000000} + \dots = \frac{8}{10} + \frac{\frac{76}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} \\ &= \frac{8}{10} + \frac{76}{990} = \frac{868}{990} = \frac{434}{495} \end{aligned}$$