

1-4 函數的極限

重點整理

一、函數的極限

1. 函數的極限：

設函數 $f(x)$ 在一個包含 a 的開區間中的任意實數 $x (x \neq a)$ 有定義，若能找到一個實數 L 使得：只要 x 足夠靠近 a ，函數 $f(x)$ 的值要多麼靠近 L 都可以。則我們稱函數 $f(x)$ 在 $x = a$ 時有極限 L ，記為 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。

(1) 左極限： x 軸上， x 從 a 的左邊趨近於 a 時， $f(x)$ 趨近的值，記為 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ 。

(2) 右極限： x 軸上， x 從 a 的右邊趨近於 a 時， $f(x)$ 趨近的值，記為 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ 。

所謂 x 趨近於 a ，是指 x 愈來愈接近 a ，而不是 $x = a$ 。

2. 極限存在的條件：

$f(x)$ 在 $x = a$ 有極限 $L \Leftrightarrow f(x)$ 在 $x = a$ 的左極限等於右極限，且都等於 L 。

即 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 等價於 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ 且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ 。

3. 函數極限的運算性質：

若函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x = a$ 時極限存在，且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ， $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ ，則下列極限存在：

(1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = L \pm M$ 。

(2) 若 c 為常數，則 $\lim_{x \rightarrow a} (cf(x)) = cL$ 。

(3) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x)g(x)) = LM$ 。

(4) 若 $M \neq 0$ ，且對某個包含 a 的開區間的所有不等於 a 的 x 都有 $g(x) \neq 0$ ，則

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}。$$

(5) 若 $L \geq 0$ ，且對某個包含 a 的開區間的所有不等於 a 的 x 都有 $f(x) \geq 0$ ，則

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}。$$

4. 多項式函數與有理函數的極限：

求多項式函數與有理函數在 $x = a$ 的極限時，只要直接代入即可（即 $x = a$ ）。

若 $f(x)$ ， $g(x)$ 為多項式函數，則：

(1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ 。

(2) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}$ ，其中 $g(a) \neq 0$ 。

二、連續函數

直觀而言，連續函數就是「圖形沒有斷掉」。

1. 函數在某一點連續：

設函數 $f(x)$ 在一區間上有定義， a 為該區間中的一點。

(1) 若 a 為該區間的內點（非端點），且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ ，則稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 連續。

(2) 若 a 為該區間的左端點，且 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$ ，則稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 連續。

(3) 若 a 為該區間的右端點，且 $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$ ，則稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 連續。

2. 函數在某一區間連續：

如果函數 $f(x)$ 在某個範圍中的每個點都連續，就稱 $f(x)$ 在這個範圍是連續的。

反之，只要 $f(x)$ 在某一點不連續，就稱 $f(x)$ 不連續。

3. 連續函數：

當函數在定義區間的每一點都連續，我們稱此函數為連續函數。

例： $f(x) = 3x + 2$ ， $g(x) = x^2 - 3x + 1$ ， $h(x) = \sin x + 3$ 都是連續函數。

4. 連續函數的性質：

(1) 連續函數的四則運算：

設函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 在 $x = a$ 連續，則下列性質成立：

① $f(x) \pm g(x)$ 在 $x = a$ 連續。

② $f(x)g(x)$ 在 $x = a$ 連續。

③ 當對某個包含 a 的開區間的所有 x 都有 $g(x) \neq 0$ ，有 $\frac{f(x)}{g(x)}$ 在 $x = a$ 連續。

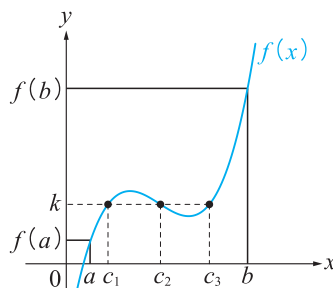
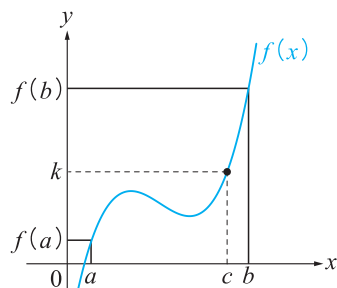
(2) 多項式函數 $f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ 是連續函數。

(3) 若 $f(x)$ 在 $x = a$ 連續， $g(x)$ 在 $x = f(a)$ 連續，則合成函數 $(g \circ f)(x)$ 在 $x = a$ 連續。

三、介值定理與勘根定理

1. 介值定理 (intermediate value theorem)：

設 a, b 為兩實數， $a < b$ 且 $f(x)$ 是在 $[a, b]$ 上的連續函數，若 k 是介於 $f(a)$ 與 $f(b)$ 之間的實數，但不等於 $f(a)$ 及 $f(b)$ ，則至少有一個實數 c 滿足 $a < c < b$ ，且 $f(c) = k$ 。



例： $f(x) = x^2$ 是連續函數， $f(1) = 1$ ， $f(2) = 4$ ，而 3 介於 1 與 4 之間，所以 1，2 之間至少有一個實數 c 滿足 $c^2 = 3$ ，也就是 $1 < c < 2$ 使得 $c^2 = 3$ 。事實上，這個 c 就是 $\sqrt{3}$ ，說明 $\sqrt{3}$ 確實存在。

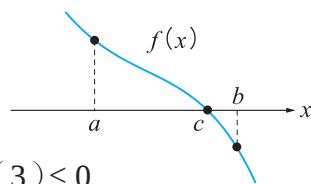
2. 勘根定理 (location of roots theorem)：

設 a, b 為兩實數，連續函數 $f(x)$ 滿足 $f(a)f(b) < 0$ ，則 $f(x) = 0$ 在 a, b 之間至少有一實根 c 。

例：說明方程式 $x^2 - 3x + 1 = 0$ 在 2, 3 之間有實根。

令 $f(x) = x^2 - 3x + 1$ $\therefore f(2) = -1$ ， $f(3) = 1$ ， $f(2)f(3) < 0$

$\therefore$ 由勘根定理知， $x^2 - 3x + 1 = 0$ 在 2, 3 之間有實根。



四、夾擠定理 (squeeze theorem)

設 $f(x)$ ， $g(x)$ ， $h(x)$ 均為函數，且在包含 a 的開區間中，任意實數 $x (x \neq a)$ 都滿足 $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ 。若 $g(x)$ 與 $h(x)$ 在 $x = a$ 時極限都存在，且

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \lim_{x \rightarrow a} h(x) = L$ ，則 $f(x)$ 在 $x = a$ 時極限存在，且 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ 。

例：已知對任意實數 x ，函數 $f(x)$ 滿足 $3x + 1 \leq f(x) \leq x^2 + 5x + 2$ ，試求 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 。

$\therefore \lim_{x \rightarrow -1} (3x + 1) = -2$ ， $\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 5x + 2) = -2$

$\therefore$ 由夾擠定理可知 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -2$ 。

例題 1 函數的極限(一)

計算下列各極限：

(1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x$ 。(5分)

(2) $\lim_{x \rightarrow 3} 5$ 。(5分)

解 (1) $\lim_{x \rightarrow \pi} \cos x = \cos \pi = -1$
 (2) $\lim_{x \rightarrow 3} 5 = 5$

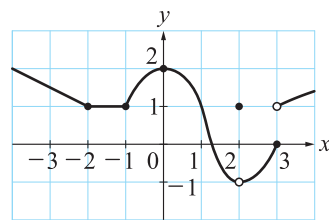
例題 2 函數的極限(二)

函數 $f(x)$ 圖形如右圖，試求：

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 。(4分)

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ 。(3分)

(3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 。(3分)



解 (1) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ 不存在

因為 x 由左邊趨近於 3 時， $f(x)$ 趨近於 0，但 x 由右邊趨近於 3 時， $f(x)$ 趨近於 1，兩者不相等

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -1$

因為 x 由左邊或右邊趨近於 2 時， $f(x)$ 趨近於 -1

(3) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$

例題 3 函數極限不存在

設函數 $f(x) = [x]$ ，試求：

(1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ 。(3分)

(2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ 。(3分)

(3) 利用(1)與(2)說明 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在。(4分)

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} [x] = 0$

(2) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [x] = 1$

(3) $\because \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$
 $\therefore \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在

例題 4 多項式函數與有理函數的極限

計算下列各極限：

(1) $\lim_{x \rightarrow 3} ((x-1)(x^2+2x-4))$ 。(5分)

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{x^2-x+3}$ 。(5分)

解 (1) $\lim_{x \rightarrow 3} ((x-1)(x^2+2x-4)) = 2(9+6-4) = 22$

(2) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+5}{x^2-x+3} = \frac{2+5}{4-2+3} = \frac{7}{5}$

例題 5 有理函數的極限一分母為 0 但可以消去因式

計算下列各極限：

(1) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2-25}{x+5}$ 。(5分)

(2) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3}{x-3} - \frac{x+9}{(x-3)(x+1)} \right)$ 。(5分)

解 (1) $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{x^2-25}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x+5)(x-5)}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -5} (x-5) = -5-5 = -10$

(2) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{3}{x-3} - \frac{x+9}{(x-3)(x+1)} \right)$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{3x+3-x-9}{(x-3)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-6}{(x-3)(x+1)}$
 $= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{x+1} = \frac{2}{3+1} = \frac{1}{2}$

例題 6 由分式函數極限存在計算未知係數

已知 $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+a}{x+3}$ 存在，試求：

(1) 實數 a 。(5分)

(2) 此極限的值。(5分)

解 (1) $\because \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+a}{x+3}$ 存在，且 $x = -3$ 使得分母為 0

$\therefore x+3$ 必整除 x^2+a

由因式定理，令 $x = -3$ 代入得 $(-3)^2 + a = 0$

$\Rightarrow a = -9$

(2) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-3)}{x+3}$
 $= \lim_{x \rightarrow -3} (x-3) = -3-3 = -6$

例題 7 求定義的 a 值使函數在某一點連續

若 a 為實數，且 $f(x) = \begin{cases} x+3, & x \geq 2 \\ x^2+2x+a, & x < 2 \end{cases}$ 是連續函數，試求：

(1) $f(2)$ 。(5分)

(2) a 值。(5分)

解 (1) $f(2) = 2 + 3 = 5$

(2) $\because f(x)$ 在 $x > 2$ 或 $x < 2$ 的定義都是多項式函數 $\therefore$ 是連續函數

$\because f(x)$ 是連續函數 $\therefore f(x)$ 在 $x = 2$ 也要連續

$\therefore \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$

$\Rightarrow 4 + 4 + a = 5$

$\therefore a = -3$

例題 8 勘根定理的應用

假設 $f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 5$ ，已知 $f(x) = 0$ 有 3 個根，試求 $f(x) = 0$ 在哪些連續整數之間有實根。(4分、3分、3分)

解 考慮下列 $f(x)$ 的情況：

x	-1	0	1	2	3	4
$f(x)$	-1	5	3	-1	-1	9

得 $f(x) = 0$ 在 $x = -1, 0$ 之間至少有一個實根

$x = 1, 2$ 之間至少有一個實根

$x = 3, 4$ 之間至少有一個實根

已知 $f(x) = 0$ 有 3 個根，故 $f(x) = 0$ 在 $x = -1, 0$ 之間， $x = 1, 2$ 之間， $x = 3, 4$ 之間各有一實根

例題 9 夾擠定理

已知對任意實數 x ，函數 $f(x)$ 滿足 $-3x + 2 \leq f(x) \leq x^2 + x + 6$ ，試求 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ 。(10 分)

解 $\lim_{x \rightarrow -2} (-3x + 2) = 6 + 2 = 8$

$\lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + x + 6) = 4 - 2 + 6 = 8$

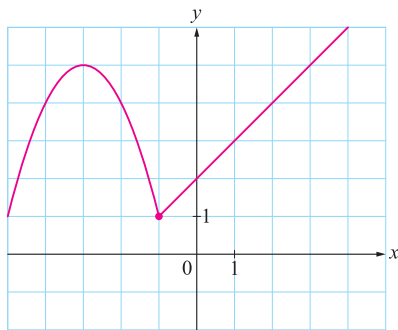
由夾擠定理知 $f(x)$ 在 $x = -2$ 的極限存在且 $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 8$

例題 10 分段定義函數的極限與連續

函數 $f(x) = \begin{cases} x + 2 & , x > -1 \\ 1 & , x = -1 \\ -x^2 - 6x - 4 & , x < -1 \end{cases}$ ，試回答下列問題：

- (1) 繪出 $y = f(x)$ 圖形。(4 分)
- (2) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 是否存在？(3 分)
- (3) $f(x)$ 在 $x = -1$ 是否連續？(3 分)

解 (1)



(2) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -(-1)^2 - 6(-1) - 4 = 1$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -1 + 2 = 1$

故 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$

因此， $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ 存在

(3) $\because f(-1) = 1$ 且 $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1$
 $\therefore f(x)$ 在 $x = -1$ 連續