第2章 綜合演練　　月　日　　得分

一、單選題（每題 5 分，共 10 分）

1. 函數 $f(x)=\dfrac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x+2}$，則 $f'(1)=$？

(A) -2　(B) $-\dfrac{4}{3}$　(C) 0　(D) $\dfrac{4}{3}$　(E) 2

解

$$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{x+2}-0}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{(x+2)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x+1)(x-3)}{x+2}=\frac{(1+1)(1-3)}{1+2}=-\frac{4}{3}$$

故選(B)

2. 已知三次函數 $f(x)=x^3+3x^2+kx-3$ 沒有極值，則 k 的範圍為何？

(A) $k<-3$　(B) $k\le-3$　(C) $k>-3$　(D) $k>3$　(E) $k\ge3$

解 已知 $f(x)$ 沒有極值，而 $f(x)$ 的三次項係數大於 0，可知 $f(x)$ 為遞增函數

故 $3^2-3\times1\times k\le0$，即 $9-3k\le0$，得 $k\ge3$

故選(E)

〔說明〕由 2-2 的重點整理**四、三次函數的繪圖**可知，

三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的 $a>0$ 且 $b^2-3ac\le0$ 時，

此函數恆為遞增，沒有極值

〈另解〉

$\because$ $f(x)$ 沒有極值，且 $f(x)$ 的三次項係數大於 0

$\therefore$ 可知 $f(x)$ 為遞增函數，故 $f'(x)>0$ 或 $f'(x)=0$

由已知得 $f'(x)=3x^2+6x+k$，若 $f'(x)\ge0$，則 $6^2-4\times3\times k\le0$

即 $36-12k\le0$，得 $k\ge3$

故選(E)

二、多選題（每題 5 分，所有選項均答對者，得 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，其餘不給分，共 10 分）

3. 已知三次函數 $f(x)=x^3-3x^2-9x+7$，試問 $f(x)$ 在下列哪些區間遞增？

(A) $(-\infty，-1]$　(B) $[-1，0]$　(C) $[0，1]$　(D) $[0，3]$　(E) $[3，\infty)$

解 $f(x)$ 的導函數 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

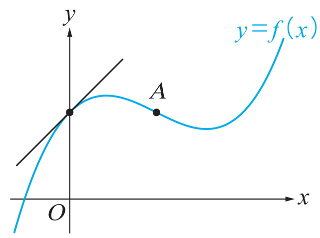
解 $f'(x)>0$，得 $x<-1$ 或 $x>3$，列表如下：

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

由判定法可知 $f(x)$ 在 $(-\infty，-1]$ 與 $[3，\infty)$ 遞增，在 $[-1，3]$ 遞減

故選(A)(E)

4. 三次多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形如右，A 是反曲點，請選出正確選項。



(A) $a>0$

(B) $b>0$

(C) $c>0$

(D) $d>0$

(E) $f(x)=0$ 有 3 個實根

解 (A) ○：圖形右邊的 x 值愈大，則函數值（y 坐標）愈大，故知 $a>0$

(B) ×：反曲點（對稱中心）在 y 軸右方，x 坐標大於 0，故 $-\dfrac{b}{3a}>0$

$\because a>0$　$\therefore b<0$

(C) ○：$f(x)$ 圖形與 y 軸的交點坐標為 $(0，d)$

過此點的切線斜率為 $f'(0)$，觀察圖形知道這個斜率大於 0

另一方面，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，我們有 $f'(0)=c$　$\therefore c>0$

(D) ○：$\because f(x)$ 圖形與 y 軸正向有交點　$\therefore f(0)=d>0$

(E) ×：$f(x)$ 圖形與 x 軸只有一個交點，故 $f(x)=0$ 只有 1 個實根

故選(A)(C)(D)

三、填充題（每格 5 分，共 60 分）

5. 已知三次函數 $f(x)=x^3+3x^2$，則圖形上以 $A(-3,0)$ 為切點的切線斜率為________，切線方程式為________。

解 先求 $f(x)$ 的一階導函數 $f'(x)=3x^2+6x$

則以 $(-3,0)$ 為切點的切線斜率為 $f'(-3)=27-18=9$

由點斜式可得切線方程式為 $y-0=9(x+3)$

整理得 $y=9x+27$

6. 將棒球以向上 24.5 公尺／秒的初速垂直拋向空中，根據拋體運動模型，t 秒後棒球的高度為距離地面 $f(t)$ 公尺，其中 $f(t)=24.5t-4.9t^2$，試問：

(1) 棒球拋出後________秒落地。

(2) 拋出 4 秒後的瞬時速度為________公尺／秒。

解 (1) 由題意知地面高度為 0 公尺，即 $f(t)=0$

解 $24.5t-4.9t^2=0$，即 $4.9t(5-t)=0$

得 $t=0$ 或 5，故知棒球 5 秒後落地

(2) 速度是位移的瞬間變化率

先求 $f'(t)=24.5-9.8t$

再令 $t=4$ 代入，得 $f'(4)=24.5-39.2=-14.7$

故知 4 秒後棒球的瞬時速度為向下 14.7 公尺／秒

7. 三次函數 $f(x)=x^3-3x^2-9x+5$ 的相對極大值為________，相對極小值為________。

解 $f'(x)=3x^2-6x-9=3(x^2-2x-3)=3(x+1)(x-3)$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-1$ 或 3

$f(-1)=-1-3+9+5=10$，$f(3)=27-27-27+5=-22$，列表如下：

x		-1		3	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		10		-22	
增減	↗		↘		↗

故相對極大值為 10，相對極小值為 -22

8. 已知三次函數 $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ 在 $x=1$ 時有極小值為 -14，且圖形的反曲點坐標為 $(-1，2)$，則：

(1) $f(x)=$________。

(2) $f(x)$ 的極大值為________。

解 (1) 由已知，$f'(x)=3x^2+2bx+c$，$f''(x)=6x+2b$

$\because$ 點 $(-1，2)$ 為反曲點　$\therefore f''(-1)=-6+2b=0$，解得 $b=3$

$\because f(x)$ 在 $x=1$ 時有極小值　$\therefore f'(1)=3+2b+c=0$，將 $b=3$ 代入，得 $c=-9$

又 $f(-1)=2$，即 $-1+b-c+d=2$，將 $b=3$，$c=-9$ 代入，得 $d=-9$

故 $f(x)=x^3+3x^2-9x-9$

(2) 由(1)，$f'(x)=3x^2+6x-9=3(x+3)(x-1)$

令 $f'(x)=0$ 得 $x=-3$ 或 1

$f(-3)=-27+27+27-9=18$，$f(1)=1+3-9-9=-14$，列表如下：

x		-3		1	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		18		-14	
增減	↗		↘		↗

因此 $f(x)$ 在 $x=-3$ 時有極大值 18

〈另解〉

三次函數的圖形以反曲點為對稱中心

$\because f(x)$ 圖形的反曲點坐標為 $(-1，2)$

$\therefore$ 得 $(1，-14)$ 的對稱點為 $(-3，18)$

故知 $f(x)$ 的極大值為 18

9. 已知三次函數 $f(x)=x^3+ax^2+bx-14$ 在 $x=2$ 與 $x=4$ 都有極值，試求：

(1) 數對 $(a, b)=$ ________。

(2) 此函數的極小值為________。

解 (1) 取 $f(x)$ 的一階導函數 $f'(x)=3x^2+2ax+b$

$\because f(x)$ 在 $x=2$ 與 $x=4$ 都有極值　$\therefore f'(2)=0$ 且 $f'(4)=0$

令 $(x-2)(x-4)=0$，得 $x^2-6x+8=0$

比較 $f'(x)=3x^2+2ax+b=0$，我們有 $\dfrac{3}{1}=\dfrac{2a}{-6}=\dfrac{b}{8}$

解得 $a=-9$，$b=24$，故數對 $(a, b)=(-9, 24)$

(2) 由(1)可知 $f(x)=x^3-9x^2+24x-14$

$f(2)=8-36+48-14=6$，$f(4)=64-144+96-14=2$，列表如下：

x		2		4	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$		6		2	
增減	↗		↘		↗

故 $f(x)$ 在 $x=4$ 有極小值 2

10. 取一張邊長 18 公分的正方形卡紙，將四個角落切去大小相同的小正方形，再將它摺為一個無蓋的小紙盒。則此小紙盒最大容積為________立方公分，此時切去的正方形邊長為________公分。

解 設切去的正方形邊長為 x 公分，且 $0<2x<18$，化簡得 $0<x<9$

則小紙盒的容積 $V=f(x)=x(18-2x)^2=4x^3-72x^2+324x$

$f'(x)=12x^2-144x+324=12(x^2-12x+27)=12(x-3)(x-9)$

令 $f'(x)=0$ 解得 $x=3$ 或 9，列表如下：

x		3		9	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
$f(x)$		432		0	
增減	↗		↘		↗

故 $f(x)$ 在 $x=3$ 有最大值 432

第 2 章 綜合演練

四、計算題（每題 10 分，共 20 分）

11. 試求三次函數 $f(x)=x^3-6x^2+12x+6$ 的切線中，斜率為 3 的切線方程式。（有兩解）

解 $f'(x)=3x^2-12x+12$

設 $x=a$ 時，$f'(a)=3$，即 $3a^2-12a+12=3$，整理得 $a^2-4a+3=0$

分解得 $(a-1)(a-3)=0$，解得 $a=1$ 或 3

代入 $f(x)$ 得 $f(1)=1-6+12+6=13$，$f(3)=27-54+36+6=15$

故知切點為 $(1,13)$ 與 $(3,15)$

由直線點斜式可得切線方程式為 $y-13=3(x-1)$ 與 $y-15=3(x-3)$

整理得 $y=3x+10$ 與 $y=3x+6$

12. 函數 $f(x)=\begin{cases}2x+5，x<5\\3x\quad\;，x\geq 5\end{cases}$，試問：

(1) $f(x)$ 在 $x=5$ 時是否連續？（5 分）

(2) $f(x)$ 在 $x=5$ 時是否可微分？（5 分）

解 (1) $\lim\limits_{x\to 5^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 5^-}(2x+5)=15$

$\lim\limits_{x\to 5^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}(3x)=15$

顯然 $\lim\limits_{x\to 5^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 5^+}f(x)=15$

我們有 $\lim\limits_{x\to 5}f(x)=f(5)$

故 $f(x)$ 在 $x=5$ 連續

(2) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-f(5)}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{f(x)-15}{x-5}$

$\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{f(x)-15}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{2x+5-15}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{2(x-5)}{x-5}=2$

$\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{f(x)-15}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{3x-15}{x-5}=\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{3(x-5)}{x-5}=3$

$\lim\limits_{x\to 5^-}\dfrac{f(x)-15}{x-5}\neq\lim\limits_{x\to 5^+}\dfrac{f(x)-15}{x-5}$，故 $f(x)$ 在 $x=5$ 時不可微分