第 1 章 極限與函數

1–1 數列及其極限

重點整理

一、數列

將一些數值依序排成一列，稱為數列。

例如：a_1，a_2，a_3，……，a_n，……，其中 a_1 稱為此數列的首項，a_n 表示這個數列的第 n 項（一般項）。

我們常用 $\langle a_n \rangle$ 表示數列，例如：$\langle n^2+3 \rangle$。

例：$\langle 2n \rangle$：2，4，6，8，10，……。

例：$\langle 2n \rangle$，n 為正整數且 $1 \leq n \leq 3$，即數列 2，4，6。

二、數列的極限及極限的性質

1. 無窮數列：若一個數列有無窮多項，稱為無窮數列。

例：$\left\langle \dfrac{1}{n} \right\rangle$：1，$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{5}$，……。

$\langle n^2-1 \rangle$：0，3，8，15，24，……。

2. 數列的收斂與發散：

(1) 若無窮數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足：存在一個定值 L，當 n 愈來愈大時，a_n 會趨近於 L。則稱此數列收斂到 L，記為 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$，此時我們稱 L 為此數列的極限。

(2) 若數列不會收斂到一個定值，則稱此數列發散。

例：數列 $\left\langle \dfrac{1}{n} \right\rangle$ 收斂到 0，也就是極限為 0，記為 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$。

數列 $\langle n^2-1 \rangle$ 無法收斂到定值，我們稱它為發散。

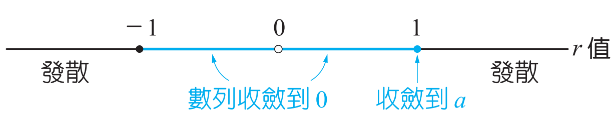
3. 無窮等比數列的收斂與發散：

無窮等比數列 $\langle ar^{n-1} \rangle$：a，ar，ar^2，ar^3，……，ar^{n-1}，……。其中實數 $a \neq 0$，$r \neq 0$。

(1) 若 $-1 < r < 1$，此數列收斂到 0。

(2) 若 $r = 1$，此數列收斂到 a。

(3) 若 $r = -1$ 或 $|r| > 1$，則此數列發散。



例：$\langle (0.99)^n \rangle$ 是無窮等比數列

$\because$ 公比 $r = 0.99$ 滿足 $-1 < r < 1$，此數列收斂。

例：$\langle (-3)^n \rangle$ 是無窮等比數列

$\because$ 公比 $r = -3$，$|-3| > 1$，此數列發散。

4. 極限的四則運算：

設〈a_n〉與〈b_n〉均為收斂數列且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = M$，則：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = L + M$。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = L - M$。

(3) 若 c 為常數，則 $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = cL$。

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = LM$。

(5) 若 $M \neq 0$，且每一項 b_n 均不為 0，則 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{L}{M}$。

5. 連續複利與常數 e：

(1) 數列$\left\langle \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n \right\rangle$的極限為 e，即 $e = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$。

(2) $e = 2.71828\cdots\cdots$，是一個無理數(小數無限位，不循環)。

(3) e 在科學及工程用途極廣，以 e 為底的對數 $\log_e x$ 稱為自然對數，又記為 $\ln x$。

三、以數學歸納法比較兩數列的大小

已知數列〈a_n〉與〈b_n〉，比較其一般項的大小，常用數學歸納法驗證。請見本節例題 9。

四、夾擠定理

1. 夾擠定理：

設〈a_n〉，〈b_n〉，〈c_n〉都是無窮數列，且從某一項開始，$b_n \le a_n \le c_n$ 恆成立。若〈b_n〉，〈c_n〉皆收斂，且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$，則數列〈$a_n$〉收斂，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$。

例：假設無窮數列〈a_n〉滿足 $5-\dfrac{1}{n} \le a_n \le 5+\dfrac{1}{n}$，則〈$a_n$〉收斂，且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$。

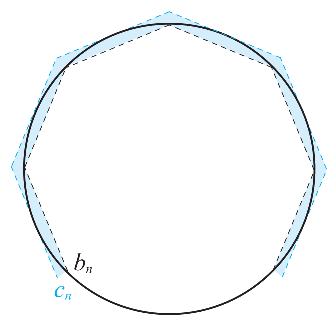
2. π 的估計：

考慮單位圓的內接與外切正 n 邊形，如右圖，設兩者面積分別為 b_n、c_n，可以看出 $b_n \le \pi \le c_n$，即

單位圓內接正 n 邊形面積 $\le$ 單位圓的面積($=\pi$)

$\le$ 單位圓外切正 n 邊形的面積，

上式兩端的值隨 n 值愈大而愈接近，利用夾擠定理可估計 π 值。中國魏晉時期劉徽透過圓內接正 3072 邊形($n = 3072$)的面積估計，得到 π 的近似值為 3.1416。



例題 1　寫出數列的前五項

(1) 試寫出數列$\langle 3n+2\rangle$的前五項。（5 分）

(2) 已知數列$\langle a_n\rangle$的一般項為 $a_n=n^2+3$，試寫出此數列的前五項。（5 分）

解　依序令 $n=1$，2，3，4，5 分別代入可得

(1) $\langle 3n+2\rangle$的前五項：5，8，11，14，17

(2) $\langle n^2+3\rangle$的前五項：4，7，12，19，28

例題 2　寫出數列的一般項

試寫出下列數列的一般項 a_n：

(1) 正偶數所成的數列：2，4，6，8，……。（5 分）

(2) 正整數的倒數所成的數列：$\frac{1}{1}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{4}$，……。（5 分）

解 (1) 一般項 a_n 為 $2n$

(2) 一般項 a_n 為 $\frac{1}{n}$

例題 3　等比數列第幾項開始大於或小於定值（使用計算機）

(1) 已知等比數列$\langle a_n\rangle=\left\langle \frac{1}{3^n}\right\rangle$，試求此數列從第幾項開始，其值會小於 10^{-16}。（5 分）

(2) 已知等比數列$\langle b_n\rangle=\langle (1.01)^n\rangle$，試求此數列從第幾項開始，其值會大於 100。（5 分）

解

(1) 解 $\frac{1}{3^n}<10^{-16}$，取常用對數得 $-n\log 3<-16$，故

$n>\frac{16}{\log 3}\approx 33.53445239$，即數列從第 34 項開始，其值會小於 10^{-16}

(2) 解 $(1.01)^n>100$，取常用對數得 $n\log 1.01>2$，故

$n>\frac{2}{\log 1.01}\approx 462.8157851$，即數列從第 463 項開始，其值會大於 100

例題 4　收斂數列的極限

判斷下列各數列是否收斂，若為收斂數列，試求其極限。

(1) $\left\langle 3+\dfrac{1}{n^2}\right\rangle$。（3 分）　(2) $\langle 3\rangle$。（3 分）

(3) $\langle (-1)^{n-1}\rangle$。（3 分）　(4) $\left\langle \left(\dfrac{5}{4}\right)^n\right\rangle$。（3 分）

解

(1) $\left\langle 3+\dfrac{1}{n^2}\right\rangle$：$3+\dfrac{1}{1}$，$3+\dfrac{1}{4}$，$3+\dfrac{1}{9}$，$3+\dfrac{1}{16}$，……

會趨近於 3，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{1}{n^2}\right)=3$

(2) $\langle 3\rangle$：3，3，3，3，……，每一項都是 3，故 $\lim\limits_{n\to\infty}3=3$

(3) $\langle (-1)^{n-1}\rangle$：1，−1，1，−1，……

當 n 愈大時，仍是 1，−1 交替出現，不會趨近於任何定值，故此數列發散

(4) $\left\langle \left(\dfrac{5}{4}\right)^n\right\rangle$：$\dfrac{5}{4}$，$\dfrac{25}{16}$，$\dfrac{125}{64}$，$\dfrac{625}{256}$，……

當 n 愈大時，各項的值愈大，不會趨近於任何定值，故此數列發散

例題 5　判斷無窮數列極限是否存在

試判斷數列 $\left\langle \cos\dfrac{n\pi}{2}\right\rangle$ 的極限是否存在，若存在，則求其極限。（6 分）

解

令 $n=1$，2，3，4，……分別代入 $\cos\dfrac{n\pi}{2}$

得此數列為 0，−1，0，1，0，−1，0，1，0，−1，0，1，……

顯然，n 趨近於無窮大時，$\cos\dfrac{n\pi}{2}$ 不會趨近任何定值

故知數列 $\left\langle \cos\dfrac{n\pi}{2}\right\rangle$ 的極限不存在，是一個發散數列

例題 6　判斷無窮等比數列是否收斂

判斷下列各數列是否收斂：

(1) $\left\langle \left(\dfrac{4}{3}\right)^n\right\rangle$。（5 分）

(2) $\langle (-0.8)^n\rangle$。（5 分）

解

(1) ∵公比為 $r=\dfrac{4}{3}>1$

∴此數列發散

(2) ∵公比 $r=-0.8$ 滿足 $-1<r<1$ 條件

∴此數列收斂

1-1

翰林用心教師用精益求精

例題 7　極限的四則運算

試求下列各無窮數列的極限：

(1) $\left\langle 3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right\rangle$。（3 分）　(2) $\left\langle \dfrac{4^{n-1}+3}{4^n}\right\rangle$。（3 分）

(3) $\left\langle \left(\dfrac{2n-3}{n}\right)\left(\dfrac{7n+1}{5n}\right)\right\rangle$。（3 分）　(4) $\left\langle \dfrac{5n^2+3}{4n^2}\right\rangle$。（3 分）

解

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{1}{n^2}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}3+2\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}$

$=3+2\times0-0=3$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n-1}+3}{4^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n-1}}{4^n}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{4^n}=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n-1}}{4^{n-1}}+3\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{4^n}$

$=\dfrac{1}{4}\lim\limits_{n\to\infty}1+3\times0=\dfrac{1}{4}$

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\dfrac{2n-3}{n}\right)\left(\dfrac{7n+1}{5n}\right)\right]=\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n-3}{n}\right)\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7n+1}{5n}\right)$

$=2\times\dfrac{7}{5}=\dfrac{14}{5}$

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2+3}{4n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n^2}{4n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{4n^2}=\dfrac{5}{4}+0=\dfrac{5}{4}$

例題 8　常數 e 的相關問題（使用計算機）

(1) 錢多多銀行推出優存專案，每人限存 10000 元，年利率 100 %，每天複利一次，為期一年。試求存入 10000 元滿一年（365 天）的本利和。（四捨五入至整數位）（5 分）

(2) 試求極限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^n$。（5 分）

解

(1) $10000\left(1+\dfrac{1}{365}\right)^{365}\approx 10000\times2.714567475\approx27146$（元）

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n}{5}}\right)^{\frac{n}{5}\times5}$

令 $t=\dfrac{n}{5}$，得 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{5}{n}\right)^n=\lim\limits_{t\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t\right]^5=e^5$

例題 9　數學歸納法的應用

(1) 試比較數列〈n^2〉與〈$2n+5$〉，觀察並指出第幾項以後，前者的項比較大。（2 分）

(2) 試利用數學歸納法驗證(1)的結果。（8 分）

解 (1)〈n^2〉：1，4，9，16，25，36，49，……

〈$2n+5$〉：7，9，11，13，15，17，19，……

觀察得知從第 4 項開始，$n^2>2n+5$

(2) 證明 $n\geq 4$ 時，$n^2>2n+5$

① 當 $n=4$ 時，$4^2>2\times 4+5$，原式成立

② 設 $n=k(k\geq 4)$時，$k^2>2\times k+5$ 成立

則 $n=k+1$ 時

$$\begin{aligned}(k+1)^2=k^2+2k+1&>2k+5+2k+1\\&=2(k+1)+5+2k-1\\&>2(k+1)+5 \quad \because k\geq 4\end{aligned}$$

即$(k+1)^2>2(k+1)+5$，原式亦成立

故由數學歸納法得證

例題 10　數列極限的夾擠定理

已知無窮數列〈a_n〉滿足 $\dfrac{n-3}{4n}\leq a_n\leq\dfrac{n+3}{4n}$，試求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。（10 分）

解

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{n-3}{4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n}-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4n}=\frac{1}{4}-0=\frac{1}{4}$$

$$且 \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{4n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{4n}+\lim_{n\to\infty}\frac{3}{4n}=\frac{1}{4}+0=\frac{1}{4}$$

因此，由夾擠定理可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{4}$

翰林用心 教師用 精益求精