第 1 章 綜合演練　月　日　得分

一、單選題（每題 5 分，共 10 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\dfrac{3}{2n}+4\right)\left(\dfrac{n-2}{2n+1}+1\right)\right)=?$

(A) 1　(B) 3　(C) 4　(D) 6　(E)不存在。

解

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{3}{2n}+4\right)\left(\frac{n-2}{2n+1}+1\right)\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3}{2n}+4\right)\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-2}{2n+1}+1\right)$$
$$=4\times\left(\frac{1}{2}+1\right)=4\times\frac{3}{2}=6$$

故選(D)

2. $\lim\limits_{x\to3^-}\dfrac{x^2-9}{|x-3|}=?$

(A) -6　(B) -3　(C) 3　(D) 6　(E) 9。

解

$$\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-9}{|x-3|}=\lim_{x\to3^-}\frac{x^2-9}{-(x-3)}$$
$$=\lim_{x\to3^-}(-(x+3))$$
$$=-(3+3)=-6$$

故選(A)

二、多選題（每題 5 分，所有選項均答對者，得 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，其餘不給分，共 10 分）

3. 下列各無窮數列中，哪些是收斂數列？

(A) $\left\langle\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\rangle$　(B) $\left\langle\dfrac{(-1)^n}{3}\right\rangle$　(C) $\left\langle\dfrac{2^{n+1}}{3^n}\right\rangle$　(D) $\left\langle\dfrac{5^{n+1}}{3^{2n}}\right\rangle$　(E) $\left\langle\dfrac{4^n}{3^n}\right\rangle$。

解

(A) ○：公比 $r=-\dfrac{1}{3}$　$\because -1<r<1$　$\therefore$數列收斂

(B) ×：$\because$公比 $r=-1$　$\therefore$數列發散

(C) ○：$\dfrac{2^{n+1}}{3^n}=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$，公比 $r=\dfrac{2}{3}$　$\because -1<r<1$　$\therefore$數列收斂

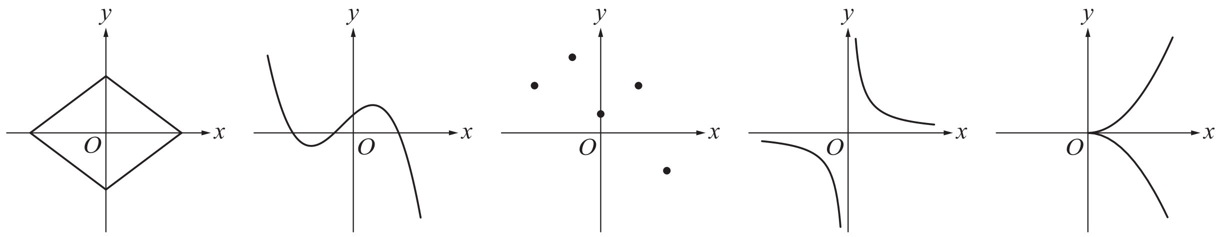
(D) ○：$\dfrac{5^{n+1}}{3^{2n}}=\dfrac{5\times5^n}{(3^2)^n}=5\left(\dfrac{5}{9}\right)^n$，公比 $r=\dfrac{5}{9}$　$\because -1<r<1$　$\therefore$數列收斂

(E) ×：$\dfrac{4^n}{3^n}=\left(\dfrac{4}{3}\right)^n$，公比 $r=\dfrac{4}{3}$　$\because |r|>1$　$\therefore$數列發散

故選(A)(C)(D)

4. 試判斷下列哪些圖形是函數圖形？

(A)　(B)　(C)　(D)　(E)



解 分別對這 5 個圖形作鉛垂線
若每條鉛垂線至少只與圖形有一個交點
則此圖形是函數圖形
故選(B)(C)(D)

三、填充題（每格 5 分，共 60 分）

5. (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n^2}=$ ________。

(2) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+15n-3}{4n^2}=2$，則 $a=$ ________。

解 (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots\cdots+n}{n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n(n+1)}{2\times n^2}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n}{2n^2}=\dfrac{1}{2}$

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2+15n-3}{4n^2}=2$

$\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{an^2}{4n^2}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{15n}{4n^2}-\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3}{4n^2}=2$

$\Rightarrow \dfrac{a}{4}+0-0=2\Rightarrow\dfrac{a}{4}=2\Rightarrow a=8$

6. (1) 將循環小數 $3.\overline{18}$ 化為有理數可得________。

(2) 有一無窮等比級數的和為 9，首項為 3，則此級數的公比為________。

解 (1) $3.\overline{18}=3+0.181818\cdots\cdots=3+0.18+0.0018+0.000018+\cdots\cdots$

$$=3+\frac{18}{100}+\frac{18}{10000}+\frac{18}{1000000}+\cdots\cdots=3+\frac{\frac{18}{100}}{1-\frac{1}{100}}=3+\frac{18}{99}=3+\frac{2}{11}=\frac{35}{11}$$

(2) 設公比為 r

則 $\dfrac{3}{1-r}=9\Rightarrow 3=9-9r\Rightarrow 9r=6$

$\therefore r=\dfrac{2}{3}$

7. (1) 函數 $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x-2}}{x-1}$ 的定義域為________。

(2) 定義函數 $f(x)=x^2-2x+2$，定義域為 $\{-1，0，1，2，3\}$，則函數 $f(x)$ 的值域為________。

解 (1) $x^2+x-2\geq 0$ 且 $x-1\neq 0$

$\Rightarrow (x+2)(x-1)\geq 0$ 且 $x\neq 1$

$\Rightarrow x\leq -2$ 或 $x\geq 1$，$x\neq 1$

$\therefore$ 定義域為 $\{x\mid x\in\mathbb{R}，x\leq -2$ 或 $x>1\}$

(2) $f(-1)=1+2+2=5$

$f(0)=0-0+2=2$

$f(1)=1-2+2=1$

$f(2)=4-4+2=2$

$f(3)=9-6+2=5$

故函數 $f(x)$ 的值域為 $\{1，2，5\}$

8. 定義函數 $f(x)=\begin{cases}3x-2 & ，x\geq 5\\ x^2+|x| & ，-5\leq x<5\\ -3x+2 & ，x<-5\end{cases}$，則：

(1) $f(8)+f(-6)=$________。

(2) $f(f(3))=$________。

解 (1) $f(8)=3\times 8-2=22$

$f(-6)=(-3)\times(-6)+2=20$

$\therefore f(8)+f(-6)=22+20=42$

(2) $f(3)=3^2+|3|=9+3=12$

$\therefore f(f(3))=f(12)=3\times 12-2=34$

9. (1) 設 x 為方程式 $x \cdot 5^x = 5^{12}$ 的正實根，且 x 落在兩個連續正整數 n 與 $n+1$ 之間，則 $n=$________。

(2) 已知方程式 $x^3-2x^2+ax-1=0$ 在區間 $(0,1)$ 有奇數個實根，試求 a 的範圍為________。

解 (1) 令 $f(x)=x \cdot 5^x-5^{12}$

則 $f(10)=10\times 5^{10}-5^{12}=10\times 5^{10}-5^2\times 5^{10}=(10-25)\times 5^{10}<0$

$f(11)=11\times 5^{11}-5^{12}=11\times 5^{11}-5\times 5^{11}=(11-5)\times 5^{11}>0$

由勘根定理知 $f(x)=0$ 的正實根介於 10 與 11 之間，故 $n=10$

(2) 令 $f(x)=x^3-2x^2+ax-1$

則 $f(0)=-1<0$

$\because$ 區間 $(0,1)$ 有奇數個實根，由勘根定理知 $f(1)>0$

故 $1-2+a-1>0$，解得 $a>2$

10. 已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax-3}{x^2+x-2}$ 存在，試求：

(1) a 值為________。

(2) 此極限為________。

解 (1) $\because$ $x=1$ 代入分母的值為 0

$\therefore$ $x=1$ 代入分子的值也為 0

$\Rightarrow 1+a-3=0$

$\Rightarrow a=2$

(2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+x-2}$

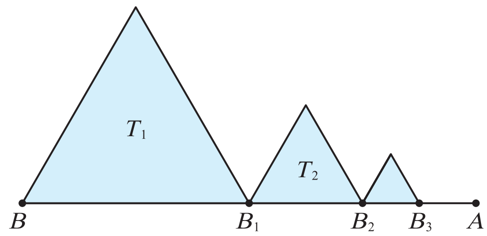
$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+3)(x-1)}{(x+2)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+3}{x+2}$

$=\dfrac{4}{3}$

四、計算題（每題 10 分，共 20 分）

11. 如右圖，已知 $\overline{AB}=12$，取 $\overline{AB}$ 的中點 B_1，以 $\overline{BB_1}$ 為邊長作正三角形 T_1。再取 $\overline{B_1A}$ 的中點 B_2，以 $\overline{B_1B_2}$ 為邊長作正三角形 T_2。如此不斷重複這些步驟，可以得到無窮多個正三角形。試求：



(1) $\dfrac{T_2\text{ 的邊長}}{T_1\text{ 的邊長}}$ 的值。（5 分）

(2) 所有正三角形的周長和。（5 分）

解 (1) 由題目條件可知，T_1 的邊長為 6，T_2 的邊長為 3

故 $\dfrac{T_2\text{ 的邊長}}{T_1\text{ 的邊長}}$ 的值為 $\dfrac{3}{6}=\dfrac{1}{2}$

(2) T_1 的周長為 $6\times3=18$

承(1)，$\dfrac{T_2\text{ 的邊長}}{T_1\text{ 的邊長}}$ 為 $\dfrac{1}{2}$，故 $\dfrac{T_2\text{ 的周長}}{T_1\text{ 的周長}}$ 也為 $\dfrac{1}{2}$

顯然正三角形 T_1，T_2，T_3，……，T_n，……的周長是一個首項為 18，公比為 $\dfrac{1}{2}$ 的無窮等比數列

故其和為 $\dfrac{18}{1-\dfrac{1}{2}}=36$

12. 設 $f(x)=\begin{cases}-2x+11 & ，x\geq3\\ x^2+ax+b & ，0\leq x<3\\ x+2 & ，x<0\end{cases}$ 是連續函數，試求 a 與 b。

解 $\because$ $f(x)$ 在 $x>3$ 或 $0<x<3$ 或 $x<0$ 的定義都是多項式函數

$\therefore$ 是連續函數

若 $f(x)$ 是連續函數，則 $f(x)$ 必須在 $x=0$ 及 $x=3$ 連續

(1) $f(x)$ 在 $x=0$ 連續

則 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=f(0)$

左極限 $\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(x+2)=0+2=2$

右極限 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x^2+ax+b)=0+b=b$

故 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=b=2$

另一方面，$f(0)=b$，故得 $b=2$

(2) $f(x)$ 在 $x=3$ 連續

則 $\lim\limits_{x\to3}f(x)=f(3)$

左極限 $\lim\limits_{x\to3^-}f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}(x^2+ax+b)=9+3a+b=3a+11$

右極限 $\lim\limits_{x\to3^+}f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}(-2x+11)=-6+11=5$

故 $\lim\limits_{x\to3}f(x)=3a+11=5$

另一方面，$f(3)=-6+11=5$，故 $3a+11=5\Rightarrow a=-2$