第2章 微　分

2-1 微分與切線

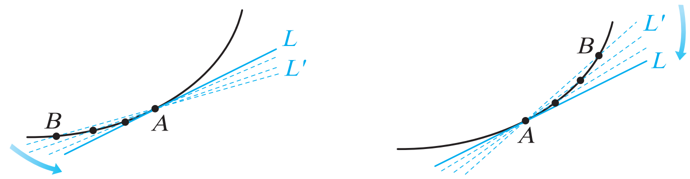
重點整理

一、切線斜率與導數

1. 切線斜率：

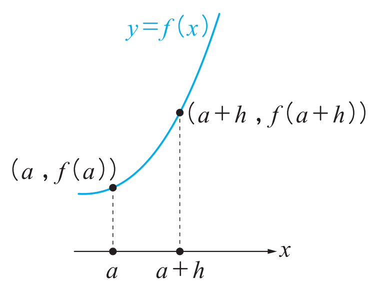
如下圖，在函數圖形上固定點 $A(a,f(a))$，讓點 $B(x,f(x))$ 沿著圖形趨近於 A 點，則割線 AB 的斜率會趨近於過 A 點的切線斜率。割線的斜率為

$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$，切線的斜率為 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$。



例：函數 $y=x^2$ 圖形上，以點 $A(1,1)$ 為切點的切線斜率為 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=2$。

2. 導數：



對於函數 $f(x)$，若極限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 存在，

則稱此極限為 $f(x)$ 在 $x=a$ 的導數，記為

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$。

令 $x=a+h$，則 $x\to a$ 時，我們有 $h\to 0$。

所以 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ 可以寫成 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$。

當此極限存在，我們稱 $f(x)$ 在 $x=a$ 有導數或可微分，反之則稱不可微分。

3. 函數可微分與連續的關係：

(1) 可微分一定連續：函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分（有導數），則 $f(x)$ 在 $x=a$ 連續。

(2) 連續不一定可微分。

(3) 不連續就不可微分。

二、導函數

給定函數 $f(x)$ 在某範圍內可微分。若 a 在此範圍中，則「由 a 對應到 $f'(a)$」定義了一個函數關係，稱為 $f(x)$ 的導函數（derivatives of function），記為 $f'(x)$ 或

$(f(x))'$ 或 $\dfrac{d}{dx}f(x)$。

例：函數 $f(x)=x^3$，導函數為 $f'(x)=3x^2$。也可記為 $(x^3)'=3x^2$ 或 $\dfrac{d}{dx}x^3=3x^2$。

三、微分的運算

假設 $f(x)$、$g(x)$ 皆為可微分函數，$f(x)$、$g(x)$ 的微分分別為 $f'(x)$、$g'(x)$。

1. 常數函數：

$f(x)=c$，則 $f'(x)=(c)'=0$。

例：$f(x)=3$，則 $f'(x)=(3)'=0$。

2. 單項式函數：

設 n 為正整數，且 $f(x)=x^n$，則 $f'(x)=(x^n)'=nx^{n-1}$。

例：$f(x)=x^5$，則 $f'(x)=(x^5)'=5x^4$。

3. 係數積：

設 c 為常數，則 $(cf(x))'=cf'(x)$。

例：$f(x)=x^5$，$c=3$，則 $(cf(x))'=(3x^5)'=3(x^5)'=3(5x^4)=15x^4$。

4. 函數的加減法：

(1) $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$。

(2) $(f(x)-g(x))'=f'(x)-g'(x)$。

例：$(2x^4+3x^2)'=8x^3+6x$。

$(3x^2-2x)'=6x-2$。

5. 多項式函數的微分：

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0$，

則 $f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots\cdots+2a_2x+a_1$。

例：$(3x^4+5x^3+3x^2+6x-2)'=12x^3+15x^2+6x+6$。

四、導數的應用

1. 切線方程式：

設函數 $f(x)$ 在 $x=a$ 可微分，則 $y=f(x)$ 圖形上以點 $(a,f(a))$ 為切點的切線方程式為 $y-f(a)=f'(a)(x-a)$。

例：$f(x)=x^2+x+2$，試求以 $y=f(x)$ 圖形上一點 $A(1,4)$ 為切點的切線方程式。

$f'(x)=2x+1$，$f'(1)=2+1=3$，故所求切線方程式為 $y-4=3(x-1)$，整理得 $3x-y+1=0$。

2. 牛頓法（求方程式的近似根）：

設 $f(x)=0$ 有一根為 α，即 $y=f(x)$ 圖形交 x 軸於 $(\alpha,0)$。我們的目標是找出 α 的近似值，利用以下步驟：

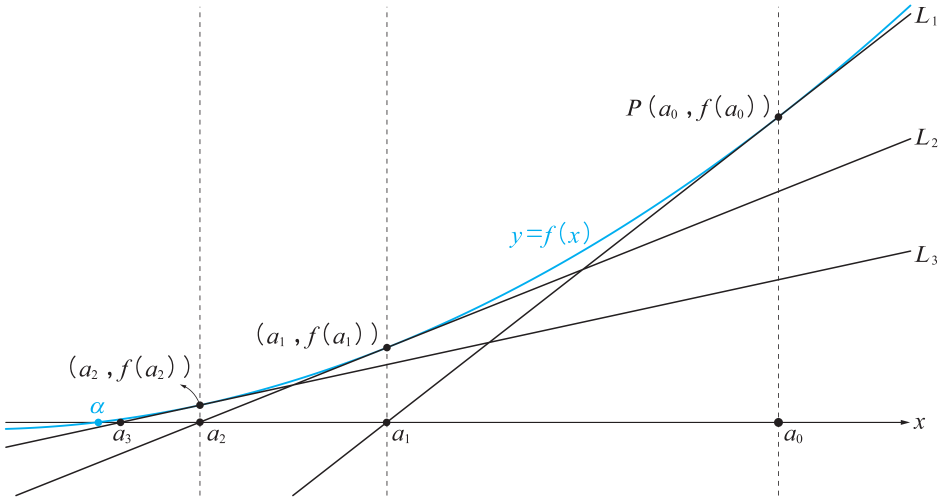
先選定一個近似值 a_0

(1) 求過 $P(a_0,f(a_0))$ 的切線 L_1，並求得 L_1 與 x 軸的交點 $(a_1,0)$。

(2) 求過 $(a_1,f(a_1))$ 的切線 L_2，並求得 L_2 與 x 軸的交點 $(a_2,0)$。

(3) 求過 $(a_2,f(a_2))$ 的切線 L_3，並求得 L_3 與 x 軸的交點 $(a_3,0)$。

由下圖可看出 a_1，a_2，a_3，……越來越趨近於 α，由此就可以得到 α 的近似值。



3. 其他函數的導函數：

(1) $(\sqrt{x})'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$。

(2) $\left(\dfrac{1}{x}\right)'=-\dfrac{1}{x^2}$。

(3) $(\sin x)'=\cos x$。

4. 瞬時速度：

函數 $f(t)$ 代表物體在時間 t 秒時的位移函數，則：

(1) 1 到 2 秒之間位移的平均變化率(平均速度)為 $\dfrac{f(2)-f(1)}{2-1}$，

1 秒到 $1+h$ 秒之間位移的平均變化率是 $\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$。

(2) 將 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 看為 1 秒時位移的瞬間變化率(瞬時速度)，

若 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1+h)-f(1)}{h}$ 存在，則函數 $f(t)$ 在 $t=1$ 可微分，$f'(1)$ 為 1 秒時的瞬時速度。

例題 1　函數圖形的割線斜率與切線斜率

已知函數 $y=2x^2$ 圖形上點 $A(-2,8)$，$P(x,2x^2)$ 為圖形上的動點，試求：

(1) 割線 AP 的斜率（以 x 表示）。（5 分）

(2) P 點趨近於 A 點時，割線斜率的極限（就是過 A 點的切線斜率）。（5 分）

解

(1) 割線 AP 的斜率為 $\dfrac{2x^2-8}{x+2}=\dfrac{2(x^2-4)}{x+2}=\dfrac{2(x+2)(x-2)}{x+2}=2(x-2)$

(2) P 點趨近於 A 點時，

割線斜率的極限為 $\lim\limits_{x\to -2}2(x-2)=-8$

也就是過 A 點的切線斜率

例題 2　導數的定義與求值

函數 $f(x)=-x^2+2$，試將 $f(x)$ 在 $x=3$ 的導數 $f'(3)$ 用定義式表示，並求此導數（極限）。（各 5 分）

解

$$f'(3)=\lim_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{-x^2+2-(-3^2+2)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{-(x^2-3^2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{-(x+3)(x-3)}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3}-(x+3)=-6$$

例題 3　用定義求函數的導函數

試利用導函數的定義，求下列函數的導函數：

(1) $f(x)=x^2$。（5 分）

(2) $g(x)=x$。（5 分）

解

(1) 對任意實數 a，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^2-a^2}{x-a}$

$$=\lim_{x\to a}\frac{(x+a)(x-a)}{x-a}=\lim_{x\to a}(x+a)=2a$$

得 $f'(a)=2a$，故 $f'(x)=2x$

(2) 對任意實數 a，$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{g(x)-g(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x-a}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}1=1$

得 $g'(a)=1$，故 $g'(x)=1$

例題 4　多項式函數的微分與導數

試利用基本微分公式計算：

(1) 函數 $f(x)=4x^3-2x+3$，求 $f'(x)$。（5 分）

(2) 函數 $g(x)=x^4+x^3-5x^2+2$，在 $x=1$ 的導數。（5 分）

解 (1) $f'(x)=12x^2-2$

(2) $g'(x)=4x^3+3x^2-10x$，故得 $g'(1)=4+3-10=-3$

例題 5　以三次函數圖形上一點為切點的切線方程式

已知三次函數 $f(x)=x^3-3x^2-2$，試求：

(1) $y=f(x)$ 圖形上以 $A(3,-2)$ 為切點的切線斜率。（5 分）

(2) 承(1)，試求此切線方程式。（5 分）

解 (1) $f'(x)=3x^2-6x$，$f'(3)=27-18=9$

$\therefore$ 以 $A(3,-2)$ 為切點的切線斜率為 9

(2) 由點斜式可得 $y-(-2)=9(x-3)$，整理得 $y=9x-29$

例題 6　函數圖形的切線

已知三次函數 $f(x)=x^3+3x^2+3x+3$，試求：

(1) 此函數圖形上以 $A(-2,1)$ 為切點的切線方程式。（5 分）

(2) 過點 $B(0,-2)$ 且與此函數圖形相切的切線方程式。（5 分）

解 (1) $f'(x)=3x^2+6x+3$，$f'(-2)=12-12+3=3$，所求切線斜率為 3

故切線方程式為 $y-1=3(x+2)$，整理得 $y=3x+7$

(2) $B(0,-2)$ 不在函數圖形上，設切點為 $(a, f(a))$，即 (a, a^3+3a^2+3a+3)

由(1)可知切線斜率為 $f'(a)=3a^2+6a+3$，

故切線方程式為 $y=(3a^2+6a+3)(x-a)+(a^3+3a^2+3a+3)$

$\because$ 此切線過 $B(0,-2)$

代入得 $-2=(3a^2+6a+3)(-a)+(a^3+3a^2+3a+3)$，

整理可得 $2a^3+3a^2-5=0$，

由因式定理，$(a-1)(2a^2+5a+5)=0$，得實根 $a=1$

故切線方程式為 $y=(3+6+3)(x-1)+(1+3+3+3)$

整理可得 $y=12x-2$

$$\begin{array}{cccc|c} 2 & +3 & +0 & -5 & 1 \\ & 2 & +5 & +5 & \\ \hline 2 & +5 & +5 & \boxed{0} & \end{array}$$

例題 7 牛頓法解方程式

已知 $\sqrt{3}$ 為 $x^2-3=0$ 的正實根，則：

(1) 由勘根定理可知 $\sqrt{3}$ 介於相鄰整數 $n-1$ 與 n 之間，試求 n 值。（5 分）

(2) 令 $a_0=n$，試用 a_0 與牛頓法，求 $\sqrt{3}$ 的下一個近似值 a_1。（5 分）

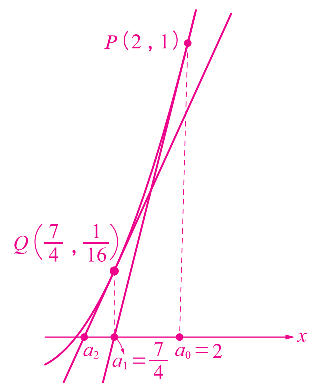
(3) 利用 a_1 與牛頓法，求 $\sqrt{3}$ 的下一個近似值 a_2。（5 分）

解 (1) 設 $f(x)=x^2-3$，將整數 0，1，2，……依序代入 $f(x)$

得 $f(1)=1-3=-2<0$，$f(2)=4-3=1>0$

由勘根定理知 $\sqrt{3}$ 介於整數 1，2 之間，即 $n=2$

(2) 作 $f(x)=x^2-3$ 部分圖形如右，



取 $a_0=2$，又 $f(2)=1$，故 P 點坐標 $(2,1)$

$\because f'(x)=2x$ $\therefore$ 過 P 點的切線斜率為 $f'(2)=4$

切線方程式為 $y-1=4(x-2)$，整理得 $y=4x-7$

解此切線與 x 軸的交點，令 $4x-7=0$，得 $x=\dfrac{7}{4}$

故取 $a_1=\dfrac{7}{4}=1.75$ 為 $\sqrt{3}$ 的近似值

(3) 在 $f(x)=x^2-3$ 圖形上取 Q 點 $\left(\dfrac{7}{4},f\left(\dfrac{7}{4}\right)\right)$，

$f\left(\dfrac{7}{4}\right)=\dfrac{49}{16}-3=\dfrac{1}{16}$，得 Q 點坐標為 $\left(\dfrac{7}{4},\dfrac{1}{16}\right)$

$\because$ 過 Q 點的切線斜率為 $f'\left(\dfrac{7}{4}\right)=\dfrac{7}{2}$

$\therefore$ 切線方程式為 $y-\dfrac{1}{16}=\dfrac{7}{2}\left(x-\dfrac{7}{4}\right)$，整理得 $y=\dfrac{7}{2}x-\dfrac{97}{16}$

解此切線與 x 軸的交點，令 $\dfrac{7}{2}x-\dfrac{97}{16}=0$，得 $x=\dfrac{97}{56}$

故取 $a_2=\dfrac{97}{56}\approx 1.732142857$ 為 $\sqrt{3}$ 的近似值

例題 8　切線斜率與導數

函數 $f(x)=3x^2$，$g(x)=x^2+4x+3$，已知 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的圖形在 $x=a$ 時切線斜率相等，試求 a 值。（5 分）

解 $f'(x)=6x$，$g'(x)=2x+4$

由已知可得 $f'(a)=g'(a)$

即 $6a=2a+4$，解得 $a=1$

2-1

例題 9　平均變化率與瞬間變化率

定義函數 $f(x)=x^2+3x-5$，試求：

(1) $f(x)$ 從 $x=1$ 到 $x=3$ 的平均變化率 $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}$。（5 分）

(2) $f(x)$ 在 $x=3$ 的瞬間變化率。（5 分）

解 (1) $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1}=\dfrac{(9+9-5)-(1+3-5)}{2}=\dfrac{13+1}{2}=7$

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x^2+3x-5)-(9+9-5)}{x-3}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+3x-18}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+6)(x-3)}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+6)=9$

例題 10　用導數計算瞬時速度

某質點 t 秒後的位移可用 $f(t)=t^2+10t+4$（單位：公尺）表示，試求：

(1) $t=2$ 至 $t=4$ 的平均速度（單位：公尺／秒）。（5 分）

(2) $t=4$ 的瞬時速度（單位：公尺／秒）。（5 分）

解 (1) $\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=\dfrac{(16+40+4)-(4+20+4)}{4-2}=\dfrac{60-28}{2}=16$（公尺／秒）

(2) 所求即 $f(t)$ 在 $t=4$ 的瞬間變化率，即 $t=4$ 的導數

$\because f'(t)=2t+10$，故得 $f'(4)=8+10=18$（公尺／秒）