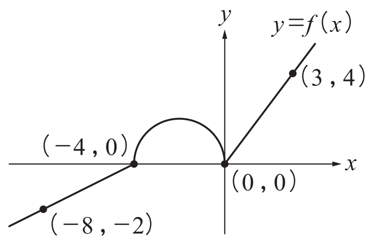
第3章 綜合演練

月　日　　得分

一、單選題（每題 5 分，共 10 分）

1. 已知函數 $f(x)$ 圖形如右圖，試求 $\int_{-8}^{3} f(x)\,dx$ 之值為何？



(A) $10+2\pi$

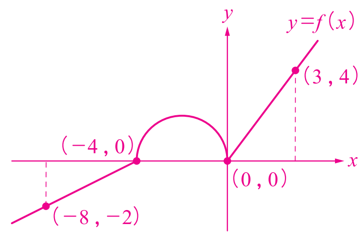
(B) $10+4\pi$

(C) $6+2\pi$

(D) $6+4\pi$

(E) $2+2\pi$

解 如右圖，所求為



$-\frac{1}{2}\,|-4-(-8)|\,|-2|+\frac{1}{2}\times\pi\times 2^2+\frac{1}{2}\,|3-0|\,|4-0|$

$=-4+2\pi+6=2+2\pi$

故選(E)

2. 定積分 $\int_{0}^{2} x(3x-4)\,dx$ 之值為何？

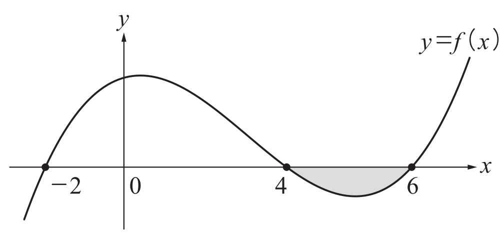
(A) -2　(B) 0　(C) 2　(D) 3　(E) 4

解 $\int_{0}^{2} x(3x-4)\,dx=\int_{0}^{2}(3x^2-4x)\,dx=(x^3-2x^2)\Big|_{0}^{2}=(8-8)-(0-0)=0$

故選(B)

二、多選題（每題 5 分，所有選項均答對者，得 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，其餘不給分，共 10 分）

3. 右圖是函數 $y=f(x)$ 的圖形，已知 $\int_{-2}^{6} f(x)\,dx=8$，塗色區域面積為 4，試選出正確的選項。



(A) $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx=4$

(B) $\int_{4}^{6} f(x)\,dx=-4$

(C) $\int_{-2}^{6}(f(x)+2)\,dx=10$

(D) $\int_{4}^{6} 2f(x)\,dx=8$

(E) $f(x)$ 圖形在 $[-2,6]$ 與 x 軸所圍區域的面積為 16

解 (A) ×：由題意知 $\int_{4}^{6} f(x)\,dx=-4$

故 $\int_{-2}^{4} f(x)\,dx=\int_{-2}^{6} f(x)\,dx-\int_{4}^{6} f(x)\,dx=8-(-4)=12$

(B) ○：由題意 $\int_{4}^{6} f(x)\,dx=-4$

(C) ×：$\int_{-2}^{6}(f(x)+2)\,dx=\int_{-2}^{6} f(x)\,dx+\int_{-2}^{6} 2\,dx=8+(2x)\Big|_{-2}^{6}=8+16=24$

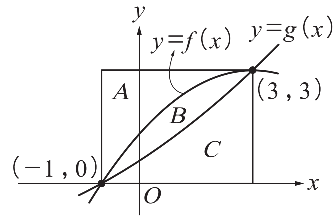
(D) ×：$\int_{4}^{6} 2f(x)\,dx=2\int_{4}^{6} f(x)\,dx=-8$

(E) ○：$f(x)$ 圖形在 $[-2,6]$ 與 x 軸所圍區域的面積為

$\int_{-2}^{4} f(x)\,dx-\int_{4}^{6} f(x)\,dx=12-(-4)=16$

故選(B)(E)

4. 如右圖，函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 的圖形都過點 $(-1,0)$、$(3,3)$。設 A、B、C 三個區域的面積分別為 a，b，c，請選出正確的選項：



(A) $a=\int_{-1}^{3}f(x)\,dx$
(B) $b=\int_{-1}^{3}(f(x)-g(x))\,dx$
(C) $c=\int_{-1}^{3}g(x)\,dx$
(D) $a+b=12-\int_{-1}^{3}g(x)\,dx$
(E) $b+c=12-\int_{-1}^{3}f(x)\,dx$

解 矩形區域面積為 $3\times|3-(-1)|=12$
(A) ×：$a=12-\int_{-1}^{3}f(x)\,dx$
(B) ○：$b=\int_{-1}^{3}(f(x)-g(x))\,dx$
(C) ○：$c=\int_{-1}^{3}g(x)\,dx$
(D) ○：$a+b=12-\int_{-1}^{3}g(x)\,dx$
(E) ×：$b+c=\int_{-1}^{3}f(x)\,dx$
故選(B)(C)(D)

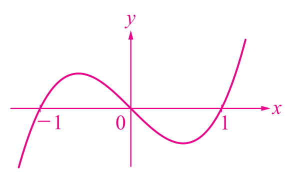
三、填充題（每格 5 分，共 60 分）

5. (1) 多項式函數 $f(x)=3x^2+4x-1$，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個反導函數且 $F(1)=6$，則 $F(x)=$ ________。
(2) 已知 $\int g(x)\,dx=x^3-2x^2+5x+C$，$C$ 為常數，則 $g(x)=$ ________。

解 (1) $\because$ $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個反導函數
$\therefore F(x)=\int(3x^2+4x-1)\,dx=x^3+2x^2-x+C$
又 $F(1)=6$，可得 $1+2-1+C=6$，解得 $C=4$，故得 $F(x)=x^3+2x^2-x+4$
(2) $g(x)=(x^3-2x^2+5x+C)'=3x^2-4x+5$

6. (1) $\int_{-4}^{4}(x^3-x)\,dx=$ ________。
(2) $\int_{0}^{4}|x^3-x|\,dx=$ ________。

解 (1) 令 $f(x)=x^3-x$
$\because$ $f(x)$ 是奇函數，圖形對原點對稱，故 $\int_{-4}^{4}(x^3-x)\,dx=0$
(2) 令 $g(x)=x^3-x=x(x+1)(x-1)$
作 $g(x)$ 概略圖形如右



故所求 $\int_{0}^{4}|x^3-x|\,dx=\int_{0}^{1}(-x^3+x)\,dx+\int_{1}^{4}(x^3-x)\,dx$

$$=\left(-\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1+\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^4$$

$$=\frac{1}{4}+\left(56-\left(-\frac{1}{4}\right)\right)=\frac{113}{2}$$

7. (1) $\int_{1}^{a} x^2\,dx = 21$，則 $a =$ ________。

(2) $\int_{0}^{3} bx^2\,dx = 18$，則 $b =$ ________。

解 (1) 由已知，$\left.\dfrac{x^3}{3}\right|_{1}^{a} = 21$，得 $\dfrac{a^3-1}{3} = 21$，故得 $a = 4$

(2) 由已知，$\left.\dfrac{bx^3}{3}\right|_{0}^{3} = 18$，得 $\dfrac{27b}{3} = 18$，故得 $b = 2$

8. 已知 $\int_{0}^{2}(ax+b)\,dx = 8$，$\int_{1}^{3}(ax+b)\,dx = 20$，則 $a =$ ________，$b =$ ________。

解 已知 $\int_{0}^{2}(ax+b)\,dx = 8$，則 $\left.\left(\dfrac{a}{2}x^2+bx\right)\right|_{0}^{2} = 8$

得 $2a+2b=8$，即 $a+b=4$ ………………①

又 $\int_{1}^{3}(ax+b)\,dx = 20$，則 $\left.\left(\dfrac{a}{2}x^2+bx\right)\right|_{1}^{3} = 20$

得 $4a+2b=20$，即 $2a+b=10$ ……………②

由①、②解得 $a=6$，$b=-2$

9. 已知 $f(x)$ 為多項式函數，且 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_{4}^{8} 2f(x)\,dx = 14$，

$\int_{-1}^{1} 3f(x)\,dx - \int_{4}^{8} 2f(x)\,dx = 10$，則：

(1) $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx =$ ________。

(2) $\int_{4}^{8} f(x)\,dx =$ ________。

解 由已知 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx + 2\int_{4}^{8} f(x)\,dx = 14$，$3\int_{-1}^{1} f(x)\,dx - 2\int_{4}^{8} f(x)\,dx = 10$

令 $a = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$，$b = \int_{4}^{8} f(x)\,dx$，我們有 $\begin{cases} a+2b=14 & \cdots\cdots\cdots\cdots① \\ 3a-2b=10 & \cdots\cdots\cdots\cdots② \end{cases}$

由①、②解得 $a=6$，$b=4$，即 $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 6$，$\int_{4}^{8} f(x)\,dx = 4$

10. 試求由下列各曲線所圍的區域繞 x 軸旋轉的旋轉體體積。

(1) $y=x+2$，$x=0$，$x=3$，x 軸：_________。

(2) $y=3\sqrt{x}\,(x\geq 0)$，$x=2$，x 軸：_________。

解

(1) $\int_0^3 \pi(x+2)^2\,dx=\pi\int_0^3(x^2+4x+4)\,dx=\pi\left(\frac{x^3}{3}+2x^2+4x\right)\Big|_0^3=\pi(9+18+12)=39\pi$

(2) $\int_0^2 \pi(3\sqrt{x})^2\,dx$

$=\pi\int_0^2 9x\,dx=\pi\left(\frac{9}{2}x^2\right)\Big|_0^2=18\pi$

四、計算題（每題 10 分，共 20 分）

11. (1) 試求函數 $f(x)=x^2+2x-3$ 圖形與 x 軸所圍成的區域面積。（5 分）

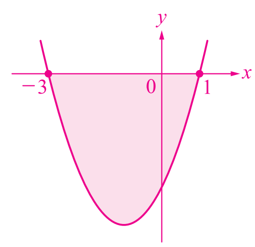
(2) 試求函數 $f(x)=x^2$ 與 $g(x)=x+2$ 圖形所圍成的區域面積。（5 分）

解 (1) 令 $x^2+2x-3=0$，得 $(x+3)(x-1)=0$

解得 $x=-3$ 或 1

作圖如右，故知 $f(x)$ 圖形與 x 軸交點的 x 坐標為 -3 或 1

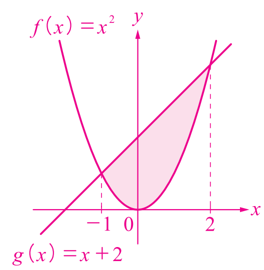
故所求為 $-\int_{-3}^1(x^2+2x-3)\,dx=-\left(\frac{x^3}{3}+x^2-3x\right)\Big|_{-3}^1=\frac{32}{3}$



(2) 令 $x^2=x+2$，得 $x^2-x-2=0$，$(x+1)(x-2)=0$

解得 $x=-1$ 或 2

作圖如右，所求為 $\int_{-1}^2(-x^2+x+2)\,dx=\left(-\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+2x\right)\Big|_{-1}^2=\frac{9}{2}$



12. 已知速度是加速度的反導函數，位置是速度的反導函數。今有某靜止質點 P 在 $t=0$ 開始，以加速度 $a=2$ 公尺／秒^2 做等加速度運動，試求：

(1) 2 秒後的速度。（5 分）

(2) 5 秒至 10 秒之間的位移。（5 分）

解 設 t 秒後質點距離初始位置 $f(t)$ 公尺，由題意可知 $f(0)=0$，$f'(0)=0$，$f''(t)=2$

(1) $f'(t)=f'(0)+\int_0^t f''(x)\,dx=0+\int_0^t 2\,dx=(2x)\Big|_0^t=2t$

故 2 秒後速度為 $f'(2)=4$（公尺／秒）

(2) $f(t)=f(0)+\int_0^t f'(x)\,dx=0+\int_0^t 2x\,dx=(x^2)\Big|_0^t=t^2$

故 5 秒至 10 秒之間的位移為

$f(10)-f(5)=100-25=75$（公尺）

〈另解〉5 秒至 10 秒之間的位移為

$\int_5^{10} f'(t)\,dt=\int_5^{10}2t\,dt=(t^2)\Big|_5^{10}=100-25=75$（公尺）