

第3章 積分

3-1 積分的意義

重點整理

一、面積

函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 連續，且在此區間內皆有 $f(x) \geq 0$ (圖形在 x 軸上方)，欲求 $f(x)$ 與 x 軸在 $[a, b]$ 所圍區域 R 的面積，方法如下：

1. 上和及下和：

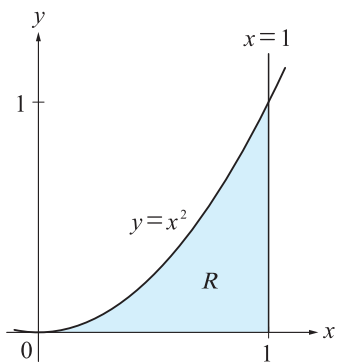
將此區間分成 n 小段，取 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ 。

(1) 上和 (upper sum)：

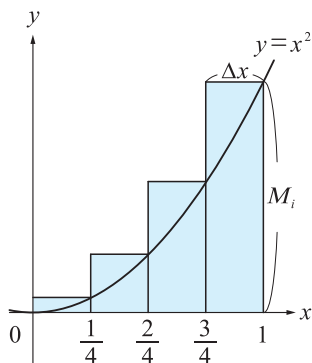
以 Δx 為寬，各小段 $f(x)$ 的最大值 M_i 為高 ($i = 1, 2, 3, \dots, n$)，稱為上矩形。這 n 個矩形面積的總和稱為上和，以 $U_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x$ 表示。

(2) 下和 (lower sum)：

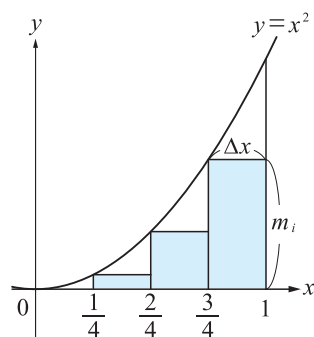
以 Δx 為寬，各小段 $f(x)$ 的最小值 m_i 為高 ($i = 1, 2, 3, \dots, n$)，稱為下矩形。這 n 個矩形面積的總和稱為下和，以 $L_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x$ 表示。



圖(一)



圖(二)



圖(三)

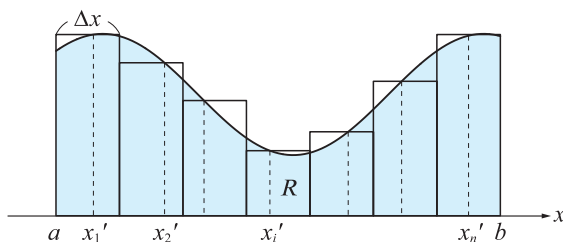
顯然， $L_n \leq R \leq U_n$ 。

2. 黎曼和：

將此區間分成 n 小段，每一小段各取一個點 x_i' ($i = 1, 2, 3, \dots, n$)，

取 $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ ，以 Δx 為寬，函數值 $f(x_i')$ 為該小段長條型的高，則所有長條形

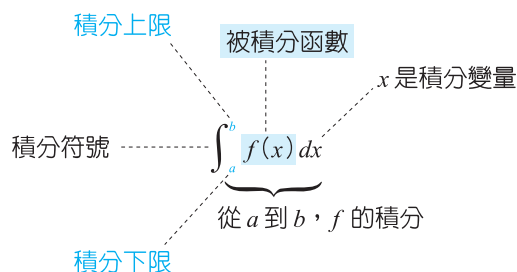
的面積總和 $\sum_{i=1}^n f(x_i') \Delta x$ 稱為黎曼和，可以作為 R 的近似值。



顯然，黎曼和介於上和與下和之間。

二、定積分

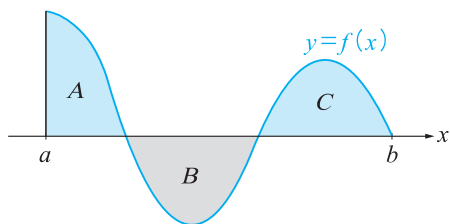
函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 為連續函數，則此函數在 $[a, b]$ 的定積分記為 $\int_a^b f(x) dx$ ，定積分的結果是一個數值，且是上和及下和的共同極限，即 $\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ 。



三、定積分的性質

1. 定積分與面積：

- (1) 若在 $[a, b]$ 都有 $f(x) \geq 0$ ，則定積分 $\int_a^b f(x) dx$ 就是函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 與 x 軸所圍區域的面積。
- (2) 若在 $[a, b]$ 都有 $f(x) \leq 0$ ，則定積分 $\int_a^b f(x) dx$ 就是函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 與 x 軸所圍區域的面積之負值。
- (3) 當被積分函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 的值有正有負時，定積分的結果是（ x 軸上方的面積）-（ x 軸下方的面積）。
如下圖， $\int_a^b f(x) dx = A - B + C$ 。



2. 定積分的運算性質：

定義 1： $\int_a^a f(x) dx = 0$ 。

定義 2： $a > b$ 時， $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ 。

(1) 定積分的線性性質：

設函數 $f(x)$ 與 $g(x)$ 都在 $[a, b]$ 連續， c 為常數，則：

① 若 $f(x) \geq 0$ 在 $[a, b]$ 成立，則 $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ 。

② $\int_a^b cf(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$ 。

③ $\int_a^b (f(x) \pm g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx$ 。

(2) 定積分的區間可加性：

設 $f(x)$ 是區間 I 上的連續函數，且 a, b, c 為 I 中的三個點，則

$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ ，對任意大小順序的 a, b, c 都成立。

例： $\int_0^5 f(x) dx = \int_0^7 f(x) dx + \int_7^5 f(x) dx$ ，即

$\int_0^5 f(x) dx = \int_0^7 f(x) dx - \int_5^7 f(x) dx$ 。

四、反導函數與不定積分

1. 反導函數：

若函數滿足 $F'(x)=f(x)$ ，則稱 $F(x)$ 為 $f(x)$ 的一個反導函數。

例： $(x^4)'=4x^3$ ，所以 x^4 是 $4x^3$ 的反導函數。

$$\left(\frac{1}{3}x^3\right)'=x^2，\text{所以 } \frac{1}{3}x^3 \text{ 是 } x^2 \text{ 的反導函數。}$$

2. 多項式函數的不定積分：

$$\int (a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0) dx$$

$$= \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n} x^n + \cdots + \frac{a_2}{3} x^3 + \frac{a_1}{2} x^2 + a_0 x + C，\text{其中 } C \text{ 為任意常數。}$$

例： $\int (x+1) dx = \frac{x^2}{2} + x + C$ ，其中 C 為任意常數。

$$\int (x^2 + 2x + 3) dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + 3x + C，\text{其中 } C \text{ 為任意常數。}$$

五、微積分基本定理

1. 微積分基本定理：

若函數 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 連續，則 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$ ，其中 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一個反導函數，也就是 $F'(x)=f(x)$ 。

2. 定積分的計算：

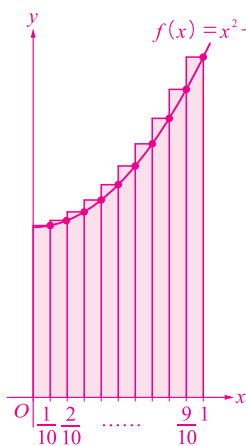
$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$ ，也就是先找到 $f(x)$ 的一個反導函數 $F(x)$ ，再計算 $F(b) - F(a)$ 即為所求。

例： 欲求定積分 $\int_1^2 (2x+3) dx$ 的值，首先找到 $2x+3$ 的一個反導函數 $F(x)=x^2+3x$ ，其次，計算 $F(2)-F(1)=(4+6)-(1+3)=6$ 即為所求。

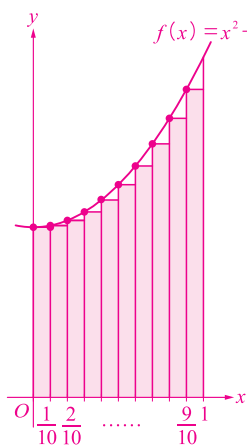
例題 1 上和及下和

將 $[0, 1]$ 分成 10 段，試求函數 $f(x) = x^2 + 1$ 在 $[0, 1]$ 內的圖形與 x 軸所圍區域面積的上和與下和。(各 5 分)

解 將 $[0, 1]$ 分成 10 段，每段寬為 $\frac{1}{10} |1 - 0| = \frac{1}{10}$



圖(一)



圖(二)

(1) 如圖(一)，取各段函數值最大值為該矩形的高，分別為

$$\frac{1}{100} + 1, \frac{4}{100} + 1, \dots, \frac{100}{100} + 1$$

$$\text{故上和為 } U_{10} = \frac{1}{10} \left(\frac{1 + 4 + 9 + \dots + 100}{100} + 10 \right) = \frac{1}{10} \left(\frac{385}{100} + 10 \right) = \frac{277}{200}$$

(2) 如圖(二)，取各段函數值最小值為該矩形的高，分別為

$$0 + 1, \frac{1}{100} + 1, \frac{4}{100} + 1, \dots, \frac{81}{100} + 1$$

$$\text{故下和為 } L_{10} = \frac{1}{10} \left(\frac{0 + 1 + 4 + \dots + 81}{100} + 10 \right) = \frac{1}{10} \left(\frac{285}{100} + 10 \right) = \frac{257}{200}$$

例題 2 用面積計算定積分(絕對值函數、分段定義函數)

(1) 試求定積分 $\int_0^5 |x - 2| dx$ 。(5 分)

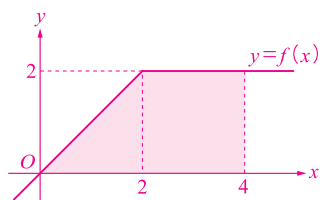
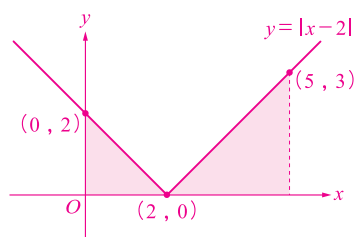
(2) $f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 2 \\ x, & x < 2 \end{cases}$ ，試求定積分 $\int_0^4 f(x) dx$ 。(5 分)

解 (1) $\int_0^5 |x - 2| dx$ 為函數 $y = |x - 2|$ 在 $[0, 5]$ 與 x 軸所圍的面積

$$\text{故得 } \int_0^5 |x - 2| dx = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + \frac{1}{2} \times 3 \times 3 = \frac{13}{2}$$

(2) $\int_0^4 f(x) dx$ 為函數 $f(x)$ 在 $[0, 4]$ 與 x 軸所圍的面積

$$\text{故得 } \int_0^4 f(x) dx = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 + 2 \times 2 = 6$$



例題 3 用面積計算定積分(正弦函數)

- (1) 試求 $\int_{\pi}^{3\pi} \sin x \, dx$ 。(5分)
(2) 試求 $\int_0^{3\pi} \sin 2x \, dx$ 。(5分)

解 (1) 如右圖，正弦函數 $y = \sin x$ 的週期為 2π

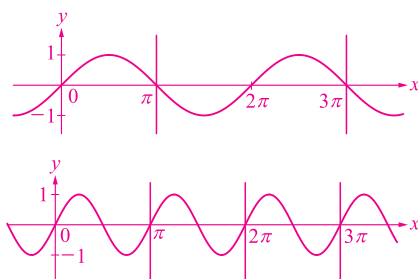
一個週期的 $\sin x$ 函數圖形面積恰為 0

$$\text{故得 } \int_{\pi}^{3\pi} \sin x \, dx = 0$$

(2) 如右圖， $y = \sin 2x$ 的週期為 π

因為一個週期的 $\sin 2x$ 函數圖形面積恰為 0

$$\text{故得 } \int_0^{3\pi} \sin 2x \, dx = 0 + 0 + 0 = 0$$



例題 4 用面積計算定積分(半圓的函數表示)

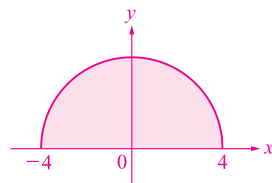
試求 $\int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2} \, dx$ 。(5分)

解 令 $y = \sqrt{16-x^2}$ ，圖形為右圖中的曲線

該定積分是要算出該曲線與 x 軸所圍出的區域面積

$$\text{即為半圓面積 } \frac{1}{2} \times \pi \times 4^2 = 8\pi$$

$$\text{故 } \int_{-4}^4 \sqrt{16-x^2} \, dx = 8\pi$$



例題 5 定積分的線性性質

- (1) 已知 $\int_{-1}^2 f(x) dx = 5$, $\int_{-1}^2 g(x) dx = 3$, 試求 $\int_{-1}^2 (2f(x) - 3g(x)) dx$ 。(5分)
- (2) 已知 $\int_0^{2\pi} \cos x dx = 0$, 試求 $\int_0^{2\pi} (3 \cos x + 2) dx$ 。(5分)

解 由定積分的線性性質

$$(1) \int_{-1}^2 (2f(x) - 3g(x)) dx = 2 \int_{-1}^2 f(x) dx - 3 \int_{-1}^2 g(x) dx = 2 \times 5 - 3 \times 3 = 1$$

$$(2) \int_0^{2\pi} (3 \cos x + 2) dx = 3 \int_0^{2\pi} \cos x dx + \int_0^{2\pi} 2 dx = 0 + 2 \times 2\pi = 4\pi$$

例題 6 定積分的區間可加性

- (1) $\int_2^6 f(x) dx = 5$, $\int_6^8 f(x) dx = 3$, 試求 $\int_2^8 f(x) dx$ 。(5分)
- (2) $\int_3^6 f(x) dx = 10$, $\int_3^8 f(x) dx = 7$, 試求 $\int_8^6 f(x) dx$ 。(5分)

解 由定積分的區間可加性

$$(1) \int_2^8 f(x) dx = \int_2^6 f(x) dx + \int_6^8 f(x) dx = 5 + 3 = 8$$

$$(2) \int_6^8 f(x) dx = \int_3^8 f(x) dx - \int_3^6 f(x) dx = 7 - 10 = -3$$

$$\text{故 } \int_8^6 f(x) dx = - \int_6^8 f(x) dx = 3$$

〈另解〉

$$\int_8^6 f(x) dx = \int_8^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx$$

$$= -7 + 10$$

$$= 3$$

例題 7 多項式函數的不定積分

試求下列各不定積分：

(1) $\int 8 dx$ 。(5分)

(2) $\int 2x dx$ 。(5分)

(3) $\int (-x^2 + 4) dx$ 。(5分)

解 (1) $\int 8 dx = 8x + C$ ，其中 C 為任意常數

(2) $\int 2x dx = x^2 + C$ ，其中 C 為任意常數

(3) $\int (-x^2 + 4) dx = -\frac{1}{3}x^3 + 4x + C$ ，其中 C 為任意常數

例題 8 多項式函數的定積分

(1) 試求 $\int_{-1}^3 (6x^2 - 2x + 5) dx$ 。(5分)

(2) 試求 $\int_1^3 (x+1)(x-1)(4x+1) dx$ 。(5分)

解 (1) $\int_{-1}^3 (6x^2 - 2x + 5) dx$
 $= (2x^3 - x^2 + 5x) \Big|_{-1}^3$
 $= (54 - 9 + 15) - (-2 - 1 - 5)$
 $= 60 - (-8)$
 $= 68$

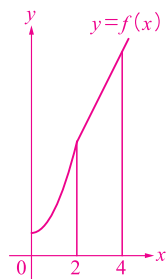
(2) $\int_1^3 (x+1)(x-1)(4x+1) dx$
 $= \int_1^3 (4x^3 + x^2 - 4x - 1) dx$
 $= \left(x^4 + \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - x \right) \Big|_1^3$
 $= (81 + 9 - 18 - 3) - \left(1 + \frac{1}{3} - 2 - 1 \right)$
 $= 69 - \left(-\frac{5}{3} \right)$
 $= \frac{212}{3}$

例題 9 分段定義函數的定積分

已知 $f(x) = \begin{cases} 2x+1, & x \geq 2 \\ x^2+1, & x < 2 \end{cases}$ ，試求定積分 $\int_0^4 f(x) dx$ 。(10分)

解 由定積分的區間可加性，

$$\begin{aligned} \int_0^4 f(x) dx &= \int_0^2 f(x) dx + \int_2^4 f(x) dx \\ &= \int_0^2 (x^2+1) dx + \int_2^4 (2x+1) dx \\ &= \left(\frac{1}{3}x^3 + x \right) \Big|_0^2 + (x^2 + x) \Big|_2^4 \\ &= \left(\frac{8}{3} + 2 - 0 \right) + (16 + 4 - 4 - 2) \\ &= \frac{14}{3} + 14 \\ &= \frac{56}{3} \end{aligned}$$



例題 10 利用奇函數與偶函數的特性計算定積分

(1) 已知 $f(x)$ 是奇函數，試求 $\int_{-5}^5 f(x) dx$ 。(5分)

(2) 已知 $g(x)$ 是偶函數，且 $\int_0^2 g(x) dx = 10$ ，試求 $\int_{-2}^2 g(x) dx$ 。(5分)

解 (1) 由定積分的區間可加性，我們有 $\int_{-5}^5 f(x) dx = \int_{-5}^0 f(x) dx + \int_0^5 f(x) dx$

∵ 奇函數的圖形對稱於原點

$$\therefore \int_{-5}^0 f(x) dx = -\int_0^5 f(x) dx$$

$$\text{故得 } \int_{-5}^5 f(x) dx = 0$$

(2) 同理， $\int_{-2}^2 g(x) dx = \int_{-2}^0 g(x) dx + \int_0^2 g(x) dx$

∵ 偶函數的圖形對稱於 y 軸

$$\therefore \int_{-2}^0 g(x) dx = \int_0^2 g(x) dx = 10$$

$$\text{故得 } \int_{-2}^2 g(x) dx = 2\int_0^2 g(x) dx = 2 \times 10 = 20$$