第3章 多項式函數

3-1 多項式的運算與應用

一、多項式的基本概念

形如 ax^n（a 是實數，n 是正整數或 0）為單項式，有限個單項式用加號連結起來可以表示成形如 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$ 的式子，稱為 x 的多項式。

二、多項式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$

1. (1) a_k：x^k 項的係數。
   (2) 若 $a_n\neq 0$，稱 $f(x)$ 為 n 次多項式，以符號 $\deg(f(x))=n$ 表示；a_n 稱為首項係數或領導係數。
2. $f(x)=a_0$ 稱為常數多項式。
   (1) 當 $a_0\neq 0$ 時，$f(x)=a_0$ 稱為零次多項式。
   (2) 0 為零多項式，我們不規定零多項式的次數。

三、多項式的加、減、乘運算與次數

設 $f(x)$、$g(x)$ 為兩個非零多項式，$\deg(f(x))=m$，$\deg(g(x))=n$，則：

(1) $\deg(f(x)\pm g(x))$小於或等於 m，n 中最大的。

(2) $\deg(f(x)\cdot g(x))=m+n$。

四、除法原理

設 $f(x)$、$g(x)$ 是兩個多項式，且 $g(x)$ 不是零多項式，則恰有兩多項式 $q(x)$ 及 $r(x)$ 滿足：$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x)$，其中 $r(x)=0$ 或 $\deg(r(x))<\deg(g(x))$。

五、因式定理與餘式定理

1. 因式定理：設 $f(x)$ 為一多項式，若 $ax-b$ 整除 $f(x)$，則 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)=0$。
2. 餘式定理：設 $f(x)$ 為一多項式，則 $f(x)$ 除以 $ax-b$ 的餘式為 $f\left(\dfrac{b}{a}\right)$。

翰林用心 教師用 精益求精

基礎題

1. 設 $f(x)=(1+2x+3x^2+\cdots\cdots+6x^5)(6+5x+4x^2+\cdots\cdots+x^5)$，試求 $f(x)$ 展開式中的

(1) x 項係數。（3 分）

(2) x^2 項係數。（3 分）

(3) 各項係數和。（4 分）

解 (1) $f(x)$ 展開式中的 x 項為 $1\cdot 5x+2x\cdot 6=17x$

故 x 項係數為 17

(2) $f(x)$ 展開式中的 x^2 項為 $1\cdot 4x^2+2x\cdot 5x+3x^2\cdot 6=32x^2$

故 x^2 項係數為 32

(3) 各項係數和為 $f(1)$

因此 $f(1)=(1+2+\cdots\cdots+6)(6+5+\cdots\cdots+1)=21\times 21=441$

2. 以 x^2+x-2 除 $4x^4-5x^3+ax^2+9x+b$ 所得餘式為 -3，試求 a，b 之值。（10 分）

解 直接以長除法計算如下

$$
\begin{array}{r|l}
 & 4x^2-9x+(a+17) \\
\hline
x^2+x-2 & 4x^4-5x^3+a\,x^2+9\,x+b \\
 & 4x^4+4x^3-8\,x^2 \\
\hline
 & -9x^3+(a+8)\,x^2+9\,x \\
 & -9x^3-9\,x^2+18\,x \\
\hline
 & (a+17)x^2-9\,x+b \\
 & (a+17)x^2+(a+17)x-2(a+17) \\
\hline
 & -(a+26)x+(b+2a+34)
\end{array}
$$

得餘式為 $-(a+26)x+b+2a+34=-3$

故得 $\begin{cases} a+26=0 \\ b+2a+34=-3 \end{cases}$，解得 $a=-26$，$b=15$

3. 設 $f(x)=8x^4+6x^2+6x-2$，試求：

(1) 以 $x+1$ 除 $f(x)$ 之商式及餘式。(5 分)

(2) 以 $x-\dfrac{1}{2}$ 除 $f(x)$ 之商式及餘式。(5 分)

解 (1) 利用綜合除法（也可以直接以長除法計算）

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
8 & +0 & +6 & +6 & -2 & -1 \\
 & -8 & +8 & -14 & +8 & \\
\hline
8 & -8 & +14 & -8 & \boxed{+6} &
\end{array}
$$

故得 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的商式為 $8x^3-8x^2+14x-8$，餘式為 6

(2) 利用綜合除法

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
8 & +0 & +6 & +6 & -2 & \dfrac{1}{2} \\
 & +4 & +2 & +4 & +5 & \\
\hline
8 & +4 & +8 & +10 & \boxed{+3} &
\end{array}
$$

故得 $f(x)$ 除以 $x-\dfrac{1}{2}$ 的商式為 $8x^3+4x^2+8x+10$，餘式為 3

4. 設 $f(x)=7x^{100}-6x^{34}-5x^{23}+4x^{17}+3x^8-2x^2+x$，試求 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式。(10 分)

解 由餘式定理

$f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 $f(-1)$

$$
\begin{aligned}
f(-1)&=7(-1)^{100}-6(-1)^{34}-5(-1)^{23}+4(-1)^{17}+3(-1)^8-2(-1)^2+(-1)\\
&=7-6+5-4+3-2-1\\
&=2
\end{aligned}
$$

故得 $f(x)$ 除以 $x+1$ 的餘式為 2

5. 若多項式 $f(x)$、$g(x)$ 滿足 $f(x)-g(x)=x^3-5x^2+x+1$，且 $x-1$ 為 $g(x)$ 的因式，則 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為何？(10 分)

解 因為 $x-1$ 為 $g(x)$ 的因式，由因式定理知 $g(1)=0$

又 $f(1)-g(1)=1^3-5\cdot 1^2+1+1=-2$

故可得 $f(1)=-2$

再由餘式定理可知 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 $f(1)$，即為 -2

翰林用心 教 師 用 精益求精

6. 利用綜合除法計算三次多項式 $f(x)$ 除以 $x-1$ 的算式如右，依此式計算，試求 $a+b+c+d$ 之值。（10 分）

$$\begin{array}{cccc|c} a & +b & +c & +d & 1 \\ & 5 & +e & +f & \\ \hline g & +3 & +h & \multicolumn{1}{|c}{-8} & \end{array}$$

解 由餘式定理知

$f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 $f(1)$

再由題意綜合除法算式知

$f(x)$ 除以 $x-1$ 的餘式為 -8，因此 $f(1)=-8$

又 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

故可得 $f(1)=a+b+c+d$

即 $a+b+c+d=-8$

7. 設 $f(x)=2x^3-4x^2-x+1$，

(1) 若 $f(x)=a(x-2)^3+b(x-2)^2+c(x-2)+d$，試求 $a+b+c+d$ 之值。（4 分）

(2) 試求 $f(1.99)$ 的近似值。（四捨五入至小數點後第二位）（2 分）

(3) 以 $(x-2)^2$ 除 $f(x)$ 之餘式為何？（2 分）

(4) 試求 $f(2+\sqrt{5})$。（2 分）

解 (1) 〈解法一〉

連續利用綜合除法

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & -4 & -1 & +1 & 2 \\ & +4 & +0 & -2 & \\ \hline 2 & +0 & -1 & \multicolumn{1}{|l}{-1} & \\ & +4 & +8 & & \\ \hline 2 & +4 & \multicolumn{1}{|l}{+7} & & \\ & +4 & & & \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{|l}{+8} & & & \end{array}$$

可得 $a=2$，$b=8$，$c=7$，$d=-1$，即 $a+b+c+d=16$

〈解法二〉

$f(3)=a(3-2)^3+b(3-2)^2+c(3-2)+d=a+b+c+d$

由綜合除法

$$\begin{array}{cccc|l} 2 & -4 & -1 & +1 & 3 \\ & +6 & +6 & +15 & \\ \hline 2 & +2 & +5 & \multicolumn{1}{|l}{+16} & \end{array}$$

可得 $f(3)=16$

(2) $f(x)=2(x-2)^3+8(x-2)^2+7(x-2)-1$

$f(1.99)=2(-0.01)^3+8(-0.01)^2+7(-0.01)-1$

≈ -1.07

(3) 由 $f(x)=2(x-2)^3+8(x-2)^2+7(x-2)-1$

故 $f(x)$ 除以 $(x-2)^2$ 的餘式為 $7(x-2)-1=7x-15$

(4) $f(2+\sqrt{5})=2(\sqrt{5})^3+8(\sqrt{5})^2+7(\sqrt{5})-1$

$=10\sqrt{5}+40+7\sqrt{5}-1=17\sqrt{5}+39$

8. 若 x^4-3ax^2+bx+4 有因式 $x+1$ 及 $x-2$，試求實數數對 (a,b)。(10 分)

解　令 $f(x)=x^4-3ax^2+bx+4$

由題意及因式定理知 $f(-1)=0$ 及 $f(2)=0$

因此，$(-1)^4-3a(-1)^2+b(-1)+4=0$ 及 $2^4-3a\cdot 2^2+b\cdot 2+4=0$

整理可得 $3a+b=5$ 及 $12a-2b=20$

解得 $a=\dfrac{5}{3}$，$b=0$，故實數數對 $(a,b)=\left(\dfrac{5}{3},0\right)$

進階題

9. 設 a，b 為實數 (其中 $a>0$)，若多項式 $ax^2+(2a+b)x-5$ 除以 $x^2+(2-a)x-2a$ 所得餘式為 -3，試求數對 (a,b)。(10 分)

解　直接以長除法計算如下

$$\begin{array}{r|l} & \qquad\qquad a \\ \hline x^2+(2-a)x-2a & ax^2+(2a+b)x-5 \\ & ax^2+(2a-a^2)x-2a^2 \\ \hline & \qquad (b+a^2)x+(2a^2-5) \end{array}$$

得餘式為 $(b+a^2)x+(2a^2-5)=-3$

故得 $\begin{cases} b+a^2=0 \\ a^2=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} a=1 \\ b=-1 \end{cases}$

故數對 $(a,b)=(1,-1)$

10. 多項式 $f(x)$，已知 $x+4$ 整除 $f(x)-2$，且 $x-5$ 整除 $f(x)+7$，試求：

(1) $f(5)=$？(5 分)

(2) $f(x)$ 除以 $(x+4)(x-5)$ 的餘式為何？(5 分)

解　由題意及因式定理知 $f(-4)-2=0$，$f(5)+7=0$

(1) $f(5)+7=0$，故 $f(5)=-7$

(2) 設 $f(x)$ 被 $(x+4)(x-5)$ 所除餘式為 $ax+b$

由除法原理知 $f(x)=(x+4)(x-5)Q(x)+ax+b$，其中 $Q(x)$ 為一多項式

因為 $f(-4)-2=0$，得 $f(-4)=2$

故 $f(-4)=0\cdot Q(-4)+(-4a+b)=2$，可得 $4a-b=-2$

又由 $f(5)=-7$ 知 $0\cdot Q(5)+(5a+b)=-7$，得 $5a+b=-7$

解 $\begin{cases} 4a-b=-2 \\ 5a+b=-7 \end{cases}$，得 $a=-1$，$b=-2$，故餘式為 $-x-2$

翰林用心 教師用 精益求精