第 4 章 綜合演練

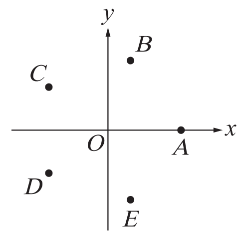
____年____月____日

得分

一、單選題（每題 7 分，共 14 分）

（(B)）1. 設 m 為實數，則在右圖中哪一點的坐標代入 $y=mx$ 會使 m 值為最大？

(A) A　(B) B　(C) C　(D) D　(E) E



解 直線 $y=mx$ 過原點 O，且 m 值即其斜率

題圖中直線 OB 斜率最大，即 B 點使 m 值最大

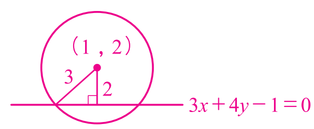
故選(B)

（(E)）2. 設圓 C：$(x-1)^2+(y-2)^2=9$，則直線 $3x+4y-1=0$ 被圓 C 所截的弦長為何？

(A) 2　(B) 3　(C) 5　(D) $\sqrt{5}$　(E) $2\sqrt{5}$

解 圓心 $(1,2)$ 至直線 $3x+4y-1=0$ 的距離為

$$\frac{|3\times1+4\times2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2$$



如右圖，弦長為 $2\sqrt{3^2-2^2}=2\sqrt{5}$

故選(E)

二、多選題（每題 10 分，錯一個選項得 6 分，錯兩個選項得 2 分，其餘不給分，共 20 分）

（(B)(D)） 3. 下列直線的斜率哪些為 $-\frac{4}{3}$？

(A) $4y+3x=1$　(B) $\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$　(C) $x=-\frac{4}{3}y+1$

(D)過 $(0,0)$ 且與 $3x-4y-5=0$ 垂直的直線

(E)過 $(2,3)$ 與 $(6,0)$ 的直線

解 (A) ×：$4y+3x=1$ 的斜率為 $-\frac{3}{4}$

(B) ○：$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1$ 過 $(3,0)$，$(0,4)$，斜率為 $\frac{4-0}{0-3}=-\frac{4}{3}$

(C) ×：$x=-\frac{4}{3}y+1$，得 $y=-\frac{3}{4}x+\frac{3}{4}$，斜率為 $-\frac{3}{4}$

(D) ○：$3x-4y-5=0$ 的斜率為 $\frac{3}{4}$，與之垂直的直線斜率為 $-\frac{4}{3}$

(E) ×：過 $(2,3)$ 與 $(6,0)$ 的直線斜率為 $\frac{0-3}{6-2}=-\frac{3}{4}$

故選(B)(D)

（(B)(E)） 4. 坐標平面上直線 $L：3x-4y+12=0$，試問下列選項哪些正確？

(A) x 截距為 4

(B) y 截距為 3

(C) L 的斜率為 $-\frac{3}{4}$

(D) L 與坐標軸圍成的三角形面積為 12

(E) L 與坐標軸圍成的三角形周長為 12

解 (A) ×：x 截距為 -4

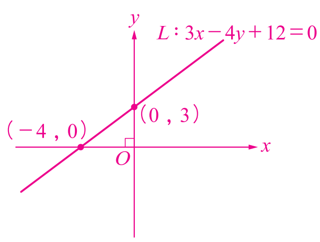
(B) ○：y 截距為 3

(C) ×：L 的斜率為 $\frac{3}{4}$

(D) ×：如右圖，面積為 $\frac{|-4|\times 3}{2}=6$

(E) ○：周長為 $3+4+5=12$

故選(B)(E)



三、填充題（每格 8 分，共 48 分）

5. 在坐標平面上，點 $A(m, 3)$，$B(1, m)$ 同在斜率 m 的直線上，則 $m=$ ＿$\pm\sqrt{3}$＿。

解 由題意知直線 AB 的斜率為 m

故得 $\dfrac{m-3}{1-m}=m$

即 $m-3=(1-m)m$

得 $m^2=3$

故 $m=\pm\sqrt{3}$

6. 已知 $A(-5, 1)$，$B(1, 7)$，$C(4, -2)$ 為坐標平面上的三個點，則過 B 點且平行 $\overline{AC}$ 的直線方程式為＿$x+3y-22=0$＿。

解 因為 $m_{\overline{AC}}=\dfrac{-2-1}{4-(-5)}=-\dfrac{1}{3}$

所以所求直線的斜率為 $-\dfrac{1}{3}$

其方程式為 $y-7=-\dfrac{1}{3}(x-1)$

即 $x+3y-22=0$

7. 設兩點 $A(2，0)$，$B(0，3)$，若點 $P(k，-3)$ 與點 $Q(4，k)$ 在直線 AB 的異側，則 k 的最大可能範圍為 $\underline{\quad -3<k<4 \quad}$。

解 直線 AB 的方程式為 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=1$，即 $3x+2y-6=0$

因為 P，Q 兩點在直線 AB 的異側，

所以 P，Q 兩點必有一個在 $3x+2y-6>0$ 的圖形內，一個在 $3x+2y-6<0$ 的圖形內

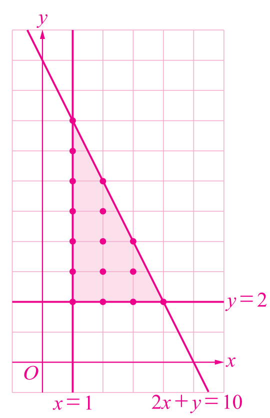
故得 $(3\times k+2\times(-3)-6)(3\times 4+2\times k-6)<0$

化簡得 $(3k-12)(2k+6)<0$，即 $(k-4)(k+3)<0$，故 $-3<k<4$

8. 已知 x，y 為整數，則滿足聯立不等式 $\begin{cases} 2x+y\leq 10 \\ x\geq 1 \\ y\geq 2 \end{cases}$ 的 $(x，y)$ 共有 $\underline{\quad 16 \quad}$ 組。

解 $\begin{cases} 2x+y\leq 10 \cdots\cdots\cdots\cdots ① \\ x\geq 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ② \\ y\geq 2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ③ \end{cases}$

圖形如右：



由①式得 $y\leq 10-2x$

當 $x=1$ 時，$2\leq y\leq 8$，故 $y=2，3，4，5，6，7，8$

當 $x=2$ 時，$2\leq y\leq 6$，故 $y=2，3，4，5，6$

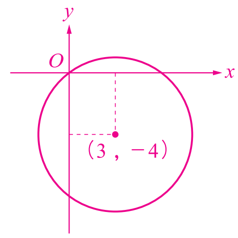
當 $x=3$ 時，$2\leq y\leq 4$，故 $y=2，3，4$

當 $x=4$ 時，$2\leq y\leq 2$，故 $y=2$

共有 $7+5+3+1=16$ 組

9. 已知圓 C 的半徑為 5，與 x 軸交於兩點且 x 截距之和為 6，與 y 軸交於兩點且 y 截距之和為 -8，則圓 C 的方程式為 $\underline{(x-3)^2+(y+4)^2=25}$ 。

解 設圓 C 與 x 軸交於 $(x_1, 0)$，$(x_2, 0)$，與 y 軸交於 $(0, y_1)$，$(0, y_2)$



則圓心坐標為 $\left(\dfrac{x_1+x_2}{2}, \dfrac{y_1+y_2}{2}\right)=\left(\dfrac{6}{2}, \dfrac{-8}{2}\right)=(3, -4)$

又半徑為 5

故得方程式為 $(x-3)^2+(y+4)^2=25$

10. 過點 $(4, 3)$ 且與 $x^2+y^2-4x=0$ 相切的直線方程式為 $\underline{5x-12y+16=0 \text{ 及 } x=4}$ 。

解 $x^2+y^2-4x=0$，即 $(x-2)^2+y^2=4$

圓心 $A(2, 0)$，半徑 $r=2$

點 $(4, 3)$ 在圓外

設過點 $(4, 3)$ 的切線方程式為 $y-3=m(x-4)$，即 $mx-y-4m+3=0$

由 A 到切線的距離即半徑 2

得 $\dfrac{|m\times2-0-4m+3|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=2$

化簡得 $|-2m+3|=2\sqrt{m^2+1}$

兩邊平方得 $(-2m+3)^2=4(m^2+1)$

得 $-12m+9=4$，故 $m=\dfrac{5}{12}$

切線應有兩條，一條斜率為 $\dfrac{5}{12}$，另一條為過 $(4, 3)$ 的鉛直線

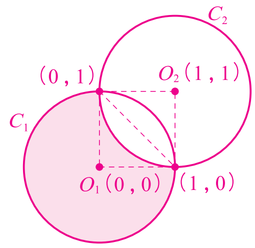
故所求為 $y-3=\dfrac{5}{12}(x-4)$ 及 $x=4$

即 $5x-12y+16=0$ 及 $x=4$

四、計算題（每題 9 分，共 18 分）

11. 已知圓 C_1：$x^2+y^2=1$，圓 C_2：$(x-1)^2+(y-1)^2=1$，若點 P 位在圓 C_1 上或其內部，且點 P 也位在圓 C_2 上或其外部，試求所有可能的點 P 所形成圖形的面積。

解 所有可能的點 P 所形成圖形如右圖中鋪色區域



$$\text{面積為 } \pi\times1^2-\left(\frac{1}{4}\pi\times1^2\times2-1^2\right)$$
$$=\pi-\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$
$$=\frac{\pi}{2}+1\text{（平方單位）}$$

12. 若直線 L：$2x-y+a=0$ 與圓 C：$x^2+y^2-6x+by+c=0$ 相切於點 $(4,1)$，試求序組 (a,b,c)。

解 圓 C 之圓心為 $\left(-\frac{-6}{2},-\frac{b}{2}\right)=\left(3,-\frac{b}{2}\right)$

因為切點與圓心連線與切線垂直

又 L 的斜率為 2

所以 $2\times\dfrac{-\frac{b}{2}-1}{3-4}=-1$，故 $b=-3$

因為切點 $(4,1)$ 同時在 L 與圓 C 上

代入方程式得 $\begin{cases}2\times4-1+a=0\\4^2+1^2-6\times4+b\times1+c=0\end{cases}$，即 $\begin{cases}7+a=0 \cdots\cdots ①\\-7+b+c=0\cdots\cdots ②\end{cases}$

由①式得 $a=-7$

$b=-3$ 代入②式得 $-7-3+c=0$，故 $c=10$

故得序組 $(a,b,c)=(-7,-3,10)$