

4-2 直線方程式的應用

一、聯立方程式的幾何意義

$$\text{二元一次聯立方程式 } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

設 $a_1x + b_1y = c_1$ 代表直線 L_1 ， $a_2x + b_2y = c_2$ 代表直線 L_2 ，

(1) 若聯立方程式恰有一組解，則 L_1 與 L_2 恰交於一點。

(2) 若聯立方程式無解，則 L_1 與 L_2 平行。

(3) 若聯立方程式有無限多組解，則 L_1 與 L_2 重合。

二、點到直線的距離公式

點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $L: ax + by + c = 0$ 的距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

三、兩平行線的距離公式

兩平行線 $ax + by + c_1 = 0$ 和 $ax + by + c_2 = 0$ 之間的距離為 $\frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 。

四、二元一次不等式

若 a, b, c 為實數，且 a, b 不全為 0，則形如 $ax + by + c > 0$ ， $ax + by + c < 0$ ， $ax + by + c \geq 0$ ， $ax + by + c \leq 0$ 的式子，稱為二元一次不等式。

五、二元一次不等式的解

滿足二元一次不等式的實數對 (x, y) 稱為該不等式的解。二元一次不等式的解通常有無限多組，將其表示在坐標平面上，其解集合為一個半平面。

六、圖解二元一次不等式

例如：描繪二元一次不等式 $ax + by \geq c$ 或 $ax + by > c$ 的圖形，

令直線 $L: ax + by = c$ ，則：

1. 先將直線 L 描繪在坐標平面上，有等號畫實線，沒有等號畫虛線。
2. 選定直線 L 外一點（通常選擇原點），代入不等式。若不等式成立，則圖形為選擇之點所在的半平面；若不成立，則圖形為選擇之點相對的另一個半平面。

● 基礎題

1. 已知點 $P(3, k)$ 到直線 $L: 3x + 4y + 5 = 0$ 的距離為 2，試求實數 k 的值。(10 分)

解 點 P 到直線 L 的距離為 $\frac{|3 \times 3 + 4k + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|14 + 4k|}{5} = 2$

$$\Rightarrow |14 + 4k| = 10$$

$$\Rightarrow 14 + 4k = 10 \text{ 或 } -10$$

$$\Rightarrow 4k = -4 \text{ 或 } -24$$

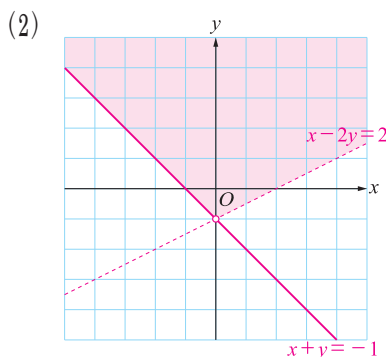
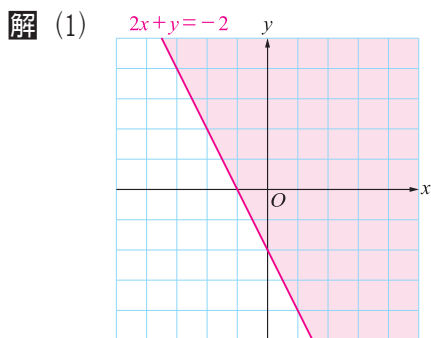
解得 $k = -1$ 或 -6

2. 已知點 $A(a, 2)$ ， $B(-1, b)$ 是不等式 $3x + 4y \geq 17$ 的解，試求實數 a, b 的最大範圍。(10 分)

解 將點 $A(a, 2)$ ， $B(-1, b)$ 分別代入不等式得 $3a + 8 \geq 17$ ， $-3 + 4b \geq 17$
分別解得 $a \geq 3$ ， $b \geq 5$

3. (1) 在坐標平面上，畫出二元一次不等式 $2x+y \geq -2$ 的圖形。(5 分)

(2) 在坐標平面上，畫出二元一次聯立不等式 $\begin{cases} x-2y < 2 \\ x+y \geq -1 \end{cases}$ 的圖形。(5 分)



4. 已知兩直線 $L_1: x+ay=2$, $L_2: 2x+(a+1)y=-2$ 。若 L_1 與 L_2 平行，試求：

(1) a 的值。(5 分)

(2) L_1 與 L_2 的距離。(5 分)

解 (1) L_1 的斜率為 $-\frac{1}{a}$, L_2 的斜率為 $-\frac{2}{a+1}$

因兩直線平行，所以斜率相等，得 $-\frac{1}{a} = -\frac{2}{a+1}$ ，故 $a=1$

(2) $L_1: x+y=2$

$L_2: 2x+2y=-2$ ，即 $x+y=-1$

故 L_1 與 L_2 的距離為 $\frac{|2-(-1)|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

5. 已知兩點 $A(-3, 0)$, $B(2, -1)$ 。若直線 $L: mx - y + 2 = 0$ 與 $\overline{AB}$ 恰交一點，試求 m 的最大可能範圍。(10 分)

解 因為直線 L 與 $\overline{AB}$ 恰交一點，

所以 A 、 B 兩點在直線 L 的異側或 L 恰過 A 、 B 其中一點

則 A 、 B 兩點必有一個在 $mx - y + 2 \geq 0$ 的圖形內，一個在 $mx - y + 2 \leq 0$ 的圖形內

故得 $(m \times (-3) - 0 + 2)(m \times 2 - (-1) + 2) \leq 0$

化簡得 $(-3m + 2)(2m + 3) \leq 0$

即 $(3m - 2)(2m + 3) \geq 0$

故 $m \geq \frac{2}{3}$ 或 $m \leq -\frac{3}{2}$

6. 直線 $L: y - 4 = m(x - 3)$ 不通過聯立不等式 $\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 所決定的區域 G ，試求 m 的範圍。(10 分)

圍。(10 分)

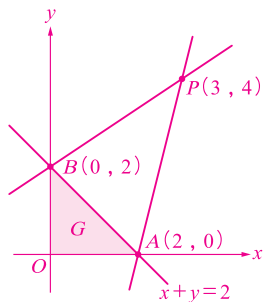
解 L 為斜率 m 且過點 $P(3, 4)$ 的直線

$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 的圖形如右：

若直線 L 過 P 、 A 兩點， L 的斜率 $m = \frac{4 - 0}{3 - 2} = 4$

若直線 L 過 P 、 B 兩點， L 的斜率 $m = \frac{4 - 2}{3 - 0} = \frac{2}{3}$

因此，當直線 L 不通過區域 G 時， $m > 4$ 或 $m < \frac{2}{3}$



● 進階題

7. 如右圖，聯立不等式 $\begin{cases} ax+by \leq c \\ -2x-y \leq d \end{cases}$ 的圖形為鋪色區域，試判斷

a, b, c, d 的正負情形。(10 分)

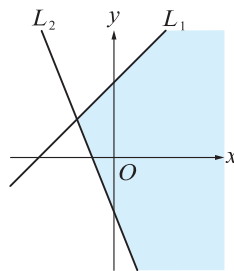
解 $-2x-y \leq d$ 圖形的界線 $-2x-y=d$ 斜率為 -2

故得 $L_1: ax+by=c, L_2: -2x-y=d$

鋪色區域在 L_1 的右下方，故 $a < 0, b > 0$

又 L_1 的 y 截距 $\frac{c}{b} > 0$ ，故得 $c > 0$

L_2 的 y 截距 $-d < 0$ ，故得 $d > 0$



8. 試就實數 a 的值，討論聯立方程式 $\begin{cases} ax+2y-a=0 \\ x+(a+1)y-(a+3)=0 \end{cases}$ 的幾何意義。(10 分)

解 直線 $ax+2y-a=0$ 的斜率為 $-\frac{a}{2}$

直線 $x+(a+1)y-(a+3)=0$ 的斜率為 $-\frac{1}{a+1}$

令 $-\frac{a}{2} = -\frac{1}{a+1}$ ，得 $a(a+1)=2$ ，解得 $a=-2$ 或 1

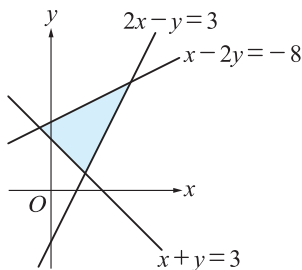
(1) 當 $a \neq -2$ 且 $a \neq 1$ 時，兩直線斜率不相等，此時兩直線恰交於一點

(2) 當 $a=-2$ 時，兩直線為 $-2x+2y+2=0, x-y-1=0$ ，斜率均為 1 ，且點 $(1, 0)$ 在兩直線上，故兩直線重合

(3) 當 $a=1$ 時，兩直線為 $x+2y-1=0, x+2y-4=0$ ，斜率均為 $-\frac{1}{2}$ ，

但點 $(1, 0)$ 在直線 $x+2y-1=0$ 上，而不在直線 $x+2y-4=0$ 上，故兩直線平行

9. 如右圖，若點 $(k, k+1)$ 在三直線 $x+y=3$ ， $2x-y=3$ ， $x-2y=-8$ 所圍成的三角形內部（不含三邊），試求實數 k 的最大可能範圍。（10 分）



解 三角形內部在直線 $x+y=3$ 的右側，
直線 $2x-y=3$ 的左側，
直線 $x-2y=-8$ 的右側

所以，三角形內部即 $\begin{cases} x+y > 3 \\ 2x-y < 3 \\ x-2y > -8 \end{cases}$ 的圖形

$$(k, k+1) \text{ 代入得 } \begin{cases} k+(k+1) > 3 \\ 2k-(k+1) < 3 \\ k-2(k+1) > -8 \end{cases}, \text{ 化簡得 } \begin{cases} k > 1 \\ k < 4 \\ k < 6 \end{cases}, \text{ 故 } 1 < k < 4$$

10. 某商店販售兩款飲料，分別為可樂一杯 20 元，果汁一杯 30 元，小珊現有 120 元，想要購買至少 2 杯，試問小珊有多少種不同的購買方法？（10 分）

解 設可樂買 x 杯，果汁買 y 杯

$$\text{則 } \begin{cases} 20x+30y \leq 120 \\ x+y \geq 2 \\ x \geq 0, y \geq 0, x, y \text{ 為整數} \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} 2x+3y \leq 12 \cdots \cdots \textcircled{1} \\ x+y \geq 2 \cdots \cdots \textcircled{2} \\ x \geq 0, y \geq 0, x, y \text{ 為整數} \end{cases}$$

作圖如右：

$$\text{由 } \textcircled{1} \text{ 式得 } y \leq \frac{12-2x}{3}$$

$$\text{由 } \textcircled{2} \text{ 式得 } y \geq 2-x$$

$$\text{故得 } 2-x \leq y \leq \frac{12-2x}{3}$$

當 $x=0$ 時， $2 \leq y \leq 4$ ，故 $y=2, 3, 4$

當 $x=1$ 時， $1 \leq y \leq \frac{10}{3}$ ，故 $y=1, 2, 3$

當 $x=2$ 時， $0 \leq y \leq \frac{8}{3}$ ，故 $y=0, 1, 2$

當 $x=3$ 時， $0 \leq y \leq 2$ ，故 $y=0, 1, 2$

當 $x=4$ 時， $0 \leq y \leq \frac{4}{3}$ ，故 $y=0, 1$

當 $x=5$ 時， $0 \leq y \leq \frac{2}{3}$ ，故 $y=0$

當 $x=6$ 時， $0 \leq y \leq 0$ ，故 $y=0$

共有 $3+3+3+3+2+1+1=16$ 種購買方法

