

2-2 常用對數

一、常用對數

- 對於每個正數 a ，都有唯一的實數 x 滿足 $10^x = a$ ，這個實數 x 記為 $\log a$ ，稱為 a 的常用對數，亦即 $10^{\log a} = a$ 。
- 若 $\log a = b$ ，亦即 $10^b = a$ 。
例如： $\log 1000 = 3$ ，因為 $10^3 = 1000$ 。

二、常用對數的大小

- 常用對數值增加 1，相當於原始數據乘上 10 倍。
- 常用對數值減少 1，相當於原始數據乘上 $\frac{1}{10}$ 倍。

三、用常用對數估計大小

- 由正數 a 的常用對數值可以判斷 a 的整數部分有幾位數。
例如：當 $2 < \log a < 3$ 時，可得 $10^2 < 10^{\log a} < 10^3$ ，即 $100 < a < 1000$ ，也就是說 a 的整數部分是一個三位數。
- $\log a < 0$ 時，可以判斷 a 在小數第幾位開始不為 0。
例如：當 $-3 < \log a < -2$ 時，可得 $10^{-3} < 10^{\log a} < 10^{-2}$ ，即 $0.001 < a < 0.01$ ，也就是說， a 必形如 $0.00***\dots$ ，即小數點後第 3 位開始不為 0。

● 基礎題

1. 試求滿足下列空格中適當的數（每小題 5 分）：

- | | |
|----------------------------|------------------------------|
| (1) $19 = 10^{\square}$ 。 | (2) $0.001 = 10^{\square}$ 。 |
| (3) $456 = 10^{\square}$ 。 | (4) $1738 = 10^{\square}$ 。 |

- 解**
- $19 = 10^{\log 19}$
 - $0.001 = 10^{-3} = 10^{\log 0.001}$
 - $456 = 10^{\log 456}$
 - $1738 = 10^{\log 1738}$

2. 試計算下列各式的值：

- $10^{\log 2 + \log 5}$ 。(5 分)
- $10^{\log 3 + \log 6}$ 。(5 分)

- 解**
- $10^{\log 2 + \log 5} = 10^{\log 2} \times 10^{\log 5} = 2 \times 5 = 10$
 - $10^{\log 3 + \log 6} = 10^{\log 3} \times 10^{\log 6} = 3 \times 6 = 18$

3. 試計算下列各式的值：

(1) $10^{\log 3 - \log 4}$ 。(5分)

(2) $10^{\log 5 - \log 8}$ 。(5分)

解

$$(1) 10^{\log 3 - \log 4} = \frac{10^{\log 3}}{10^{\log 4}} = \frac{3}{4}$$

$$(2) 10^{\log 5 - \log 8} = \frac{10^{\log 5}}{10^{\log 8}} = \frac{5}{8}$$

4. 若 $\log a = 2.3$ ， $\log b = 4.3$ ，試問 b 是 a 的多少倍？(10分)

解

〈解法一〉

由對數定義及已知可得 $a = 10^{\log a} = 10^{2.3}$ ， $b = 10^{\log b} = 10^{4.3}$

因此， $\frac{b}{a} = \frac{10^{4.3}}{10^{2.3}} = 10^2 = 100$ ，即 b 是 a 的 100 倍

〈解法二〉

常用對數值增加 1，相當於原始數據乘上 10 倍

故 b 是 a 的 100 倍

5. 已知 $\log a = 1.7$ ， $\log b = 1.3$ ，試求 ab 的值。(10分)

解

由 $\log a = 1.7$ ， $\log b = 1.3$ ，得 $a = 10^{\log a} = 10^{1.7}$ ， $b = 10^{\log b} = 10^{1.3}$

因此， $ab = 10^{1.7} \times 10^{1.3} = 10^{1.7+1.3} = 10^3 = 1000$

6. 設 a 是正數，且 $\log a = 3.2$ ，試問 a 的整數部分是幾位數？(10分)

解

因為 $a = 10^{\log a} = 10^{3.2}$

又 $10^3 < 10^{3.2} < 10^4 \Rightarrow 1000 < a < 10000$

所以 a 的整數部分是四位數

● 進階題

7. 已知 $a=\log 2$, $b=\log 50$, 試求 $a+b$ 的值。(10 分)

解 由 $a=\log 2$, $b=\log 50$, 得 $10^a=2$, $10^b=50$
 因此 $10^a \times 10^b = 2 \times 50$, 得 $10^{a+b}=100$
 故 $a+b=2$

8. 若溶液中的氫離子濃度為 $a \text{ mol/L}$, 規定它的 pH 值是 $-\log a$ 。已知某溶液的 pH 值是 3, 試問其氫離子濃度為多少?(10 分)

解 設其氫離子濃度為 $a \text{ mol/L}$, 則 $-\log a=3$
 所以 $\log a=-3$, 得 $a=10^{-3}$
 故其氫離子濃度為 $10^{-3}=0.001 \text{ mol/L}$

9. 承上題, 今有 pH 值為 3 的 A 溶液與 pH 值為 4 的 B 溶液各一公升, 試求將兩溶液混合之後的溶液的氫離子濃度。(10 分)

解 設 a 、 $b \text{ mol/L}$ 分別為 A、B 溶液的氫離子濃度
 則 $-\log a=3$, $-\log b=4$, 所以 $a=10^{-3}$, $b=10^{-4}$
 混合後的溶液的氫離子濃度為 $\frac{10^{-3} \times 1 + 10^{-4} \times 1}{2} = 5.5 \times 10^{-4} = 0.00055 \text{ mol/L}$