第 1 章 數與式

1-1 數與數線

一、有理數

1. 定義：可以表示成兩個整數相除的數，即形如 $\frac{m}{n}$ 的數（其中 m，n 為整數，且 $n \neq 0$），稱為有理數。
2. ⑴ 有理數可以表示為有限小數或循環小數。
   ⑵ 有限小數或循環小數可化為有理數。

二、實數系

1. 無理數：數線上不是有理數的數。例如：π、$\sqrt{2}$。
2. 實數：由所有有理數與無理數構成。
3. 數線上每一點都對應一個實數，每一個實數都可以在數線上找到對應的點。
4. 數系的關係：

$$\text{實數}(\mathbb{R})\begin{cases}\text{有理數}(\mathbb{Q})\begin{cases}\text{整數}(\mathbb{Z})\begin{cases}\text{正整數}(\mathbb{N})\\0\\\text{負整數}\end{cases}\\\text{分數}\begin{cases}\text{有限小數}\\\text{循環小數}\end{cases}\end{cases}\\\text{無理數（不循環的無限小數）}\end{cases}$$

三、實數的運算性質

設 a，b，c 是任意實數，則下列性質成立。

⑴ 交換律：$a+b=b+a$，$ab=ba$。
⑵ 結合律：$a+(b+c)=(a+b)+c$，$a(bc)=(ab)c$。
⑶ 乘法對加法的分配律：$a(b+c)=ab+ac$。
⑷ 消去律：若 $a+c=b+c$，則 $a=b$；若 $c\neq 0$，$ac=bc$，則 $a=b$。
⑸ 單位元素：$a+0=0+a=a$，$a\times 1=1\times a=a$。

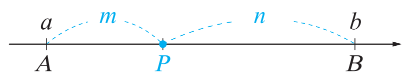
四、實數的大小關係

設 a，b，c 是任意實數，則下列性質成立。

⑴ 三一律：對於任何兩個實數 a，b，下列三種大小關係恰有一個成立：
$a<b$，$a=b$，$a>b$。
⑵ 遞移律：若 $a<b$ 且 $b<c$，則 $a<c$。
⑶ 不等式的加法性質：若 $a<b$，則 $a+c<b+c$。
⑷ 不等式的乘法性質：若 $a<b$ 且 $c>0$，則 $ac<bc$；若 $a<b$ 且 $c<0$，則 $ac>bc$。
（乘上負數後，不等號方向改變）
⑸ 若 $a^2>b^2$ 且 a，b 是正實數，則 $a>b$。

五、分點公式

設 $A(a)$，$B(b)$ 為數線上兩相異點，若 P 點介於 A，B 兩點之間且 $\overline{AP}:\overline{BP}=m:n$，則 P 點的坐標為 $\dfrac{na+mb}{m+n}$。



六、區間表示法

設 a，b 為實數，且 $a<b$，則：

(1) $a\leq x\leq b$ 可記為 $[a,b]$。

(2) $a<x<b$ 可記為 (a,b)。

(3) $x>a$ 可記為 (a,∞)。

(4) $x\leq a$ 可記為 $(-\infty,a]$。

七、實數的絕對值

對於任意實數 a，b：

1. 絕對值的幾何意義：

(1) $|a|$ 代表數線上「a 與原點的距離」。

(2) $|a-b|$ 代表數線上「a 與 b 的距離」。

2. 絕對值的性質：

(1) $|a|\geq 0$。

(2) $|a|=|-a|$。

(3) $|ab|=|a||b|$；當 $b\neq 0$ 時，$\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$。

(4) $|a|=\begin{cases} a，當 a\geq 0 \\ -a，當 a<0 \end{cases}$。

(5) $|a-b|=\begin{cases} a-b，當 a\geq b \\ b-a，當 a<b \end{cases}$。

3. 絕對值不等式的解：

設 x，k，h 是實數，$k>h>0$，則：

(1) $|x|\leq k$ 的解為 $-k\leq x\leq k$，記為 $[-k,k]$。

(2) $|x|\geq k$ 的解為 $x\leq -k$ 或 $x\geq k$，記為 $(-\infty,-k]\cup[k,\infty)$。

(3) $h\leq |x|\leq k$ 的解為 $-k\leq x\leq -h$ 或 $h\leq x\leq k$，記為 $[-k,-h]\cup[h,k]$。

(4) 多個絕對值一起出現時，依每一個絕對值變號的關鍵處，將實數分成數個範圍分開討論。

註：$\cup$ 讀作聯集， 就是「或」的意思。

基礎題

1. (1) 試將下列有理數表示為小數：

① $\dfrac{13}{25}$。（2 分）　　② $\dfrac{4}{13}$。（2 分）

(2) 試將下列小數化為最簡分數：

① 0.625。（2 分）　　② $0.\overline{54}$。（2 分）　　③ $1.2\overline{6}$。（2 分）

解 (1) ① $\dfrac{13}{25}=\dfrac{13\times4}{25\times4}=\dfrac{52}{100}=0.52$

②
$$\begin{array}{r@{\,}l}
 & 0.3076923\cdots\cdots \\ \cline{2-2}
13\,) & 4\,0 \\
 & 3\,9 \\ \cline{2-2}
 & \;100 \\
 & \;\;91 \\ \cline{2-2}
 & \;\;\;90 \\
 & \;\;\;78 \\ \cline{2-2}
 & \;\;\;120 \\
 & \;\;\;117 \\ \cline{2-2}
 & \;\;\;\;\;30 \\
 & \;\;\;\;\;26 \\ \cline{2-2}
 & \;\;\;\;\;\;40 \\
 & \;\;\;\;\;\;39 \\ \cline{2-2}
 & \;\;\;\;\;\;\;1\cdots\cdots
\end{array}$$

$\dfrac{4}{13}=0.\overline{307692}$

(2) ① $0.625=\dfrac{625}{1000}=\dfrac{5}{8}$

② $0.\overline{54}=\dfrac{54}{99}=\dfrac{6}{11}$

③ 令 $x=1.2\overline{6}=1.2666\cdots\cdots$

$$\begin{array}{rrl}
 & 100x= & 126.\overline{6} \\
-) & 10x= & 12.\overline{6} \\ \hline
 & 90x= & 114
\end{array}$$

故 $x=\dfrac{114}{90}=\dfrac{19}{15}$

2. 下列哪些有理數可表示為有限小數？（10 分）

(A) $\dfrac{1}{4}$　(B) $\dfrac{5}{6}$　(C) $\dfrac{2}{7}$　(D) $\dfrac{7}{8}$　(E) $\dfrac{27}{15}$

解 (A) ○：$\dfrac{1}{4}=0.25$

(B) ×：$\dfrac{5}{6}=0.8\overline{3}$ 為循環小數

(C) ×：$\dfrac{2}{7}=0.\overline{285714}$ 為循環小數

(D) ○：$\dfrac{7}{8}=0.875$

(E) ○：$\dfrac{27}{15}=\dfrac{9}{5}=1.8$

故選(A)(D)(E)

3. 下列哪些為有理數？（10 分）

(A) $0.\overline{34}$　(B) $\sqrt{3}$　(C) π　(D) $(\sqrt{7})^2$　(E) $\sqrt{4+5}$

解 (A) ○：循環小數必為有理數

(B) ×：$\sqrt{3}$ 是無理數

(C) ×：π 是無理數

(D) ○：$(\sqrt{7})^2=7$ 是有理數

(E) ○：$\sqrt{4+5}=\sqrt{9}=3$ 是有理數

故選(A)(D)(E)

4. (1) 試比較 $\sqrt{8}+\sqrt{3}$，$\sqrt{6}+\sqrt{4}$ 兩實數的大小關係。（5 分）

(2) 試比較 $\sqrt{5}-\sqrt{4}$，$\sqrt{6}-\sqrt{5}$ 兩實數的大小關係。（5 分）

解 (1) 因為 $(\sqrt{8}+\sqrt{3})^2=11+2\sqrt{24}$

$(\sqrt{6}+\sqrt{4})^2=10+2\sqrt{24}$

所以 $(\sqrt{8}+\sqrt{3})^2>(\sqrt{6}+\sqrt{4})^2$，故 $\sqrt{8}+\sqrt{3}>\sqrt{6}+\sqrt{4}$

(2) 由 $(\sqrt{5}-\sqrt{4})(\sqrt{5}+\sqrt{4})=1$，得 $\sqrt{5}-\sqrt{4}=\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}$

由 $(\sqrt{6}-\sqrt{5})(\sqrt{6}+\sqrt{5})=1$，得 $\sqrt{6}-\sqrt{5}=\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

又因為 $\sqrt{5}+\sqrt{4}<\sqrt{6}+\sqrt{5}$，所以 $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{4}}>\dfrac{1}{\sqrt{6}+\sqrt{5}}$

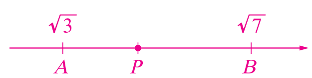
故 $\sqrt{5}-\sqrt{4}>\sqrt{6}-\sqrt{5}$

5. 設 $A(\sqrt{3})$，$B(\sqrt{7})$ 為數線上兩點，P 為數線上另一點，且 $\overline{PA}:\overline{PB}=2:3$。

(1) 若 P 點介於 A，B 兩點之間，則 P 點坐標為何？（5 分）

(2) 若 P 點不介於 A，B 兩點之間，則 P 點坐標為何？（5 分）

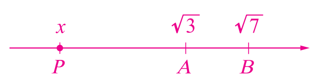
解 (1) 依題目條件可得右圖



由分點公式得

P 點坐標為 $\dfrac{3\cdot\sqrt{3}+2\cdot\sqrt{7}}{2+3}=\dfrac{3\sqrt{3}+2\sqrt{7}}{5}$

(2) 依題目條件可得右圖，且 $\overline{PA}:\overline{AB}=2:1$



設 P 點坐標為 x

由分點公式計算 A 點坐標為 $\dfrac{1\cdot x+2\cdot\sqrt{7}}{2+1}=\sqrt{3}$

得 $x=3\sqrt{3}-2\sqrt{7}$

故 P 點坐標為 $3\sqrt{3}-2\sqrt{7}$

6. 試解下列方程式：

(1) $|3x|=6$。(5 分)

(2) $|2x+5|=1$。(5 分)

解 (1) 由 $|3x|=6$，得 $3x=6$ 或 $3x=-6$

故 $x=2$ 或 $x=-2$

(2) 由 $|2x+5|=1$，得 $2x+5=1$ 或 $2x+5=-1$

故 $x=-2$ 或 $x=-3$

7. 試解下列不等式：

(1) $|2x-3|\geq 5$。(5 分)

(2) $1\leq|3x+1|<5$。(5 分)

解 (1) 由 $|2x-3|\geq 5$，得 $2x-3\geq 5$ 或 $2x-3\leq -5$

故 $x\geq 4$ 或 $x\leq -1$，也可用區間表示為 $[4,\infty)\cup(-\infty,-1]$

(2) 由 $1\leq|3x+1|<5$，得 $1\leq 3x+1<5$ 或 $-5<3x+1\leq -1$

故 $0\leq x<\frac{4}{3}$ 或 $-2<x\leq -\frac{2}{3}$，也可用區間表示為 $\left[0,\frac{4}{3}\right)\cup\left(-2,-\frac{2}{3}\right]$

進階題

8. 若 x 為整數，且滿足 $|2x-1|\leq x+3$，試求 x 共有多少個？(10 分)

解

絕對值變號的關鍵在 $x=\frac{1}{2}$ 處

因此將 x 分成兩個範圍 $x\geq\frac{1}{2}$，$x<\frac{1}{2}$ 分開討論：

(1) $x\geq\frac{1}{2}$ 時，不等式為 $2x-1\leq x+3$，得 $x\leq 4$，故 $\frac{1}{2}\leq x\leq 4$

(2) $x<\frac{1}{2}$ 時，不等式為 $-(2x-1)\leq x+3$，得 $x\geq -\frac{2}{3}$，故 $-\frac{2}{3}\leq x<\frac{1}{2}$

綜合(1)、(2)的討論得 $-\frac{2}{3}\leq x\leq 4$

又因為 x 為整數，所以 $x=0$，1，2，3，4

故 x 共有 5 個

9. 試解絕對值不等式 $2|x+1|-|x-3|\leq 5$。(10 分)

解 絕對值變號的關鍵在 $x=-1$ 與 $x=3$ 處

因此將實數 x 分成三個範圍 $x<-1$，$-1\leq x<3$，$x\geq 3$ 分開討論：

(1) 當 $x<-1$ 時，原不等式變成 $(-2x-2)-(3-x)\leq 5$，即 $-x-5\leq 5$，得 $x\geq -10$

故在 $x<-1$ 的條件下，所求的解為 $-10\leq x<-1$

(2) 當 $-1\leq x<3$ 時，原不等式變成 $2(x+1)-(3-x)\leq 5$，即 $3x-1\leq 5$，得 $x\leq 2$

故在 $-1\leq x<3$ 的條件下，所求的解為 $-1\leq x\leq 2$

(3) 當 $x\geq 3$ 時，原不等式變成 $2(x+1)-(x-3)\leq 5$，即 $x+5\leq 5$，得 $x\leq 0$

故在 $x\geq 3$ 的條件下無解

綜合上述(1)、(2)、(3)的討論，可知不等式 $2|x+1|-|x-3|\leq 5$ 的解為 $-10\leq x\leq 2$

10. 已知實數 a，b 滿足 $a>b>0$，試比較 $\frac{b}{a}$ 與 $\frac{b+1}{a+1}$ 的大小關係。(10 分)

解 $\frac{b+1}{a+1}-\frac{b}{a}=\frac{(b+1)a-b(a+1)}{(a+1)a}=\frac{a-b}{(a+1)a}>0$ $(\because a>b>0)$

故 $\frac{b+1}{a+1}>\frac{b}{a}$