

一、單選題 (每題7分, 共21分)

(E) 1. 下列哪一個數值最小?

- (A) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ (B) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$ (C) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5}$ (D) $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ (E) $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

解 因為 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$, $\left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = 2^5 = 32$,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

所以最小的是 $\left(\frac{1}{2}\right)^3$

故選(E)

(D) 2. 設 a 、 b 為正實數, 已知 $\log a = -3.5$, $\log b = -5.5$, 則 a 為 b 的幾倍?

- (A) 2 倍 (B) 10 倍 (C) 20 倍 (D) 100 倍 (E) 200 倍

解 由已知得 $a = 10^{\log a} = 10^{-3.5}$, $b = 10^{\log b} = 10^{-5.5}$

$$\frac{a}{b} = \frac{10^{-3.5}}{10^{-5.5}} = 10^2 = 100$$

故選(D)

(B) 3. 設 a 、 b 為正實數, 已知 $\log a = 13$, $\log b = 9$, 試問 $a+b$ 之值為幾位數?

- (A) 15 (B) 14 (C) 13 (D) 12 (E) 11

解 由已知 $\log a = 13$, $\log b = 9$, 得 $a = 10^{\log a} = 10^{13}$, $b = 10^{\log b} = 10^9$

則 $a+b = 10^{13} + 10^9 = 10001000000000$, 為 14 位數

故選(B)

二、多選題 (每題 10 分, 錯一個選項得 6 分, 錯兩個選項得 2 分, 其餘不給分, 共 30 分)

(C)(E) 4. 下列哪些選項正確?

(A) $2^{-1} < 0$

(B) $2^{\sqrt{3}} \times 2^{\sqrt{3}} = 8$

(C) $(2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = 8$

(D) $2^{\sqrt{5}} = (2^5)^{\frac{1}{2}}$

(E) $(\sqrt{2})^5 = \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^4 > 2^2$

解 (A) $\times : 2^{-1} = \frac{1}{2} > 0$

(B) $\times : 2^{\sqrt{3}} \times 2^{\sqrt{3}} = (2^{\sqrt{3}})^2 = 2^{2\sqrt{3}} \neq 2^3 = 8$

(C) $\bigcirc : (2^{\sqrt{3}})^{\sqrt{3}} = 2^{\sqrt{3} \times \sqrt{3}} = 2^3 = 8$

(D) $\times : 2^{\sqrt{5}} \neq 2^{\frac{5}{2}} = (2^5)^{\frac{1}{2}}$

(E) $\bigcirc : (\sqrt{2})^5 = \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^4 > (\sqrt{2})^4 = ((\sqrt{2})^2)^2 = 2^2$

故選(C)(E)

(A)(B) 5. 下列哪些選項正確?

(C)(D) (A) $\sqrt[4]{5^6} = \sqrt{5^3}$

(E) (B) $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}$

(C) $\sqrt{3 \times \sqrt[3]{3}} \times \sqrt[3]{3} = 3$

(D) $\sqrt{\sqrt{19} + \sqrt{3}} \times \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3}} = 4$

(E) 若 $a = \sqrt[5]{2}$, 則 $a^5 = 2$

解 (A) $\bigcirc : \sqrt[4]{5^6} = 5^{\frac{6}{4}} = 5^{\frac{3}{2}} = \sqrt{5^3}$

(B) $\bigcirc : \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{2^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{3}}} = 2^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{2}$

(C) $\bigcirc : \sqrt{3 \times \sqrt[3]{3}} \times \sqrt[3]{3} = (3 \times 3^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^{\frac{2}{3}} \times 3^{\frac{1}{3}} = 3^1 = 3$

(D) $\bigcirc : \sqrt{\sqrt{19} + \sqrt{3}} \times \sqrt{\sqrt{19} - \sqrt{3}} = (\sqrt{19} + \sqrt{3})^{\frac{1}{2}} \times (\sqrt{19} - \sqrt{3})^{\frac{1}{2}}$
 $= ((\sqrt{19} + \sqrt{3})(\sqrt{19} - \sqrt{3}))^{\frac{1}{2}}$
 $= (19 - 3)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$

(E) $\bigcirc : \text{若 } a = \sqrt[5]{2} = 2^{\frac{1}{5}}, \text{ 則 } a^5 = (2^{\frac{1}{5}})^5 = 2^1 = 2$

故選(A)(B)(C)(D)(E)

(A)(B) 6. 若 $\log 0.426 = -0.3706$ ，則下列敘述哪些是正確的？

(C)(D) (A) $0.426 = 10^{-0.3706}$

(B) $42.6 = 10^{1.6294}$

(C) $\log 0.00426 = -2.3706$

(D) $10^{3.6294} = 4260$

(E) $\log(4.26^2) = 2.6294$

解 (A) ○： $\log 0.426 = -0.3706$ ，則 $0.426 = 10^{\log 0.426} = 10^{-0.3706}$

(B) ○： $42.6 = 0.426 \times 100 = 10^{-0.3706} \times 10^2 = 10^{1.6294}$

(C) ○： $0.00426 = 0.426 \times 10^{-2} = 10^{-0.3706} \times 10^{-2} = 10^{-2.3706}$

故 $\log 0.00426 = -2.3706$

(D) ○： $4260 = 42.6 \times 10^2 = 10^{1.6294} \times 10^2 = 10^{3.6294}$

(E) ×： $4.26^2 = (0.426 \times 10)^2 = (10^{-0.3706} \times 10)^2 = (10^{0.6294})^2 = 10^{1.2588}$

故 $\log(4.26^2) = 1.2588$

故選(A)(B)(C)(D)

三、填充題（每格8分，共40分）

7. $10^{3 \log 2} + 10^{2 \log 3} = \underline{17}$ 。

解 $10^{3 \log 2} + 10^{2 \log 3} = (10^{\log 2})^3 + (10^{\log 3})^2 = 2^3 + 3^2 = 17$

8. 設 a 為實數，且滿足 $2^{a+1} = 3^{a+2}$ ，則 $\left(\frac{2}{3}\right)^a = \underline{\frac{9}{2}}$ 。

解 由 $2^{a+1} = 3^{a+2}$ ，得 $2^a \times 2^1 = 3^a \times 3^2$

移項得 $\left(\frac{2}{3}\right)^a = \frac{9}{2}$



9. 某種濾水器，每加一層濾網可除去水中 50 % 的雜質。若欲使水中雜質降至原本的千分之一以下，則至少要加 10 層濾網。

解 設要加 n 層濾網

$$\text{則 } (1-50\%)^n \leq \frac{1}{1000}, \text{ 即 } \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \frac{1}{1000}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^9 = \frac{1}{512}, \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1}{1024}, \text{ 得 } n \text{ 至少是 } 10$$

故至少要加 10 層濾網

10. 已知 $\log a = 13.36$ ，且將 a 表示為科學記號時為 $b \times 10^n$ ，其中 $1 \leq b < 10$ ， n 為整數，則 $n =$ 13。

解 $a = 10^{\log a} = 10^{13.36} = 10^{0.36} \times 10^{13}$

因為 $1 = 10^0 < 10^{0.36} < 10^1 = 10$

所以 $n = 13$

11. 設 $a > 0$ ， $b > 0$ ， $b \neq 1$ ，且 $a = b^2$ ，則 $\frac{\log a}{\log b} =$ 2。

解 因為 $a = 10^{\log a}$ ， $b = 10^{\log b}$

又 $a = b^2$ ，得 $10^{\log a} = (10^{\log b})^2$ ，即 $10^{\log a} = 10^{2 \times \log b}$

所以 $\log a = 2 \times \log b$ ，故 $\frac{\log a}{\log b} = 2$

四、計算題 (9 分)

12. 已知正實數 a 滿足 $(\log a)^2 - \log a - 6 = 0$ ，試求 a 之值。

解 令 $x = \log a$ ，則原式化為 $x^2 - x - 6 = 0$

得 $(x-3)(x+2) = 0$ ，故 $x = 3$ 或 $x = -2$

因此 $\log a = 3$ 或 $\log a = -2$ ，得 $a = 10^3$ 或 10^{-2}

故 $a = 1000$ 或 $\frac{1}{100}$