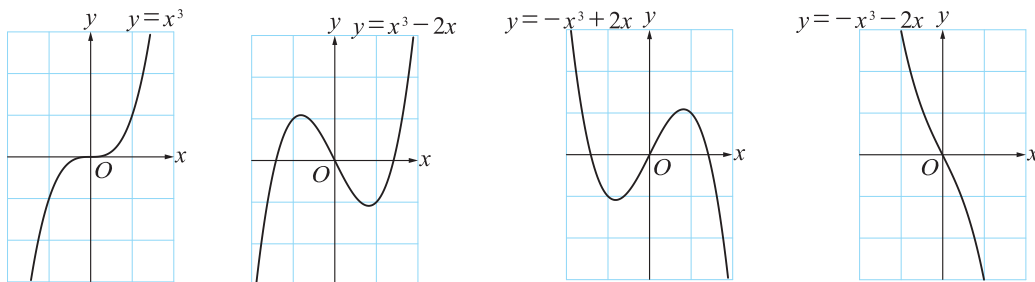


### 3-3 多項式函數的圖形與多項式不等式

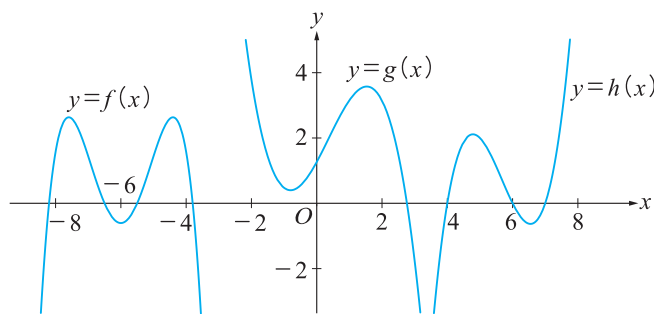
#### 一、多項式函數及其圖形

- 常數函數及一次函數的圖形都是直線。
- 二次函數的圖形都是拋物線。
- 三次函數  $y=ax^3+px$  的圖形：
  - 圖形必過原點  $(0, 0)$  且圖形對原點對稱。
  - 若  $a>0$ ，函數圖形整體上由左而右上升，右方會上升到無限大，左方會下降到負無限大；若  $a<0$ ，函數圖形整體上由左而右下降，右方會下降到負無限大，左方會上升到無限大。
  - 若  $p>0$ ，圖形在原點附近是由左而右上升，與直線  $y=px$  近似；反之若  $p<0$ ，圖形在原點附近是由左而右下降，與直線  $y=px$  近似。

例如：



- 三次以上的函數圖形都是連續不斷的曲線。



- 多項式函數圖形的性質：
  - 當首項係數為正數時，函數圖形的最右方是上升的；
  - 當首項係數為負數時，函數圖形的最右方是下降的。
- 三次函數圖形的平移：
 

三次多項式函數  $y=ax^3+bx^2+cx+d$  必可表示為  $y=a(x-h)^3+p(x-h)+k$  的形式，其中  $h=-\frac{b}{3a}$ 。因此三次函數的圖形就一定可以化為  $y=ax^3+px$  圖形的平移。

## 二、一次近似

多項式函數  $y=f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$ ，重新表示成  $f(x)=b_n(x-h)^n+b_{n-1}(x-h)^{n-1}+\cdots+b_1(x-h)+b_0$ ，則  $y=f(x)$  在  $x=h$  附近的一次近似為  $y=b_1(x-h)+b_0$ 。

例如：函數  $y=2x^3-12x^2+20x-6=2(x-2)^3-4(x-2)+2$ ，

此函數在  $x=0$  附近的一次近似為  $y=20x-6$ ；

此函數在  $x=2$  附近的一次近似為  $y=-4(x-2)+2$ 。

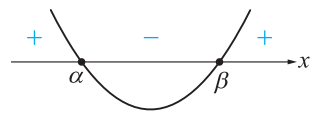
## 三、多項式不等式

### 1. 二次不等式：

設  $\alpha < \beta$ ，

(1) 不等式  $(x-\alpha)(x-\beta) > 0$  的解為  $x > \beta$  或  $x < \alpha$ 。

(2) 不等式  $(x-\alpha)(x-\beta) < 0$  的解為  $\alpha < x < \beta$ 。



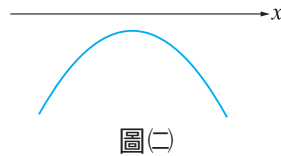
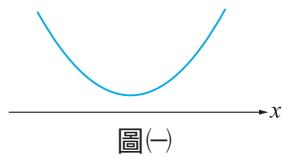
### 2. 二次不等式與判別式：

二次函數  $f(x)=ax^2+bx+c$  的判別式為  $D=b^2-4ac$ 。

(1) 若  $a > 0$  且  $D < 0$ ，則  $ax^2+bx+c$  之值恆為正數（如圖(一)），反之亦然。

(2) 若  $a < 0$  且  $D < 0$ ，則  $ax^2+bx+c$  之值恆為負數（如圖(二)），反之亦然。

**註：**  $D < 0$ ，則對於任意的實數  $x$ ，恆有  $af(x) > 0$ 。

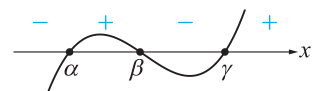


### 3. 三次不等式：

設  $\alpha < \beta < \gamma$ ，

(1) 不等式  $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) > 0$  的解為  $\alpha < x < \beta$  或  $x > \gamma$ 。

(2) 不等式  $(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) < 0$  的解為  $x < \alpha$  或  $\beta < x < \gamma$ 。

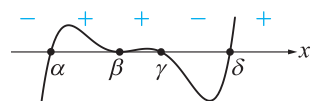


### 4. $n$ 次不等式：

例如：設  $\alpha < \beta < \gamma < \delta$ ，

(1) 不等式  $(x-\alpha)(x-\beta)^4(x-\gamma)^3(x-\delta) > 0$  的解為  $\alpha < x < \beta$  或  $\beta < x < \gamma$  或  $x > \delta$ 。

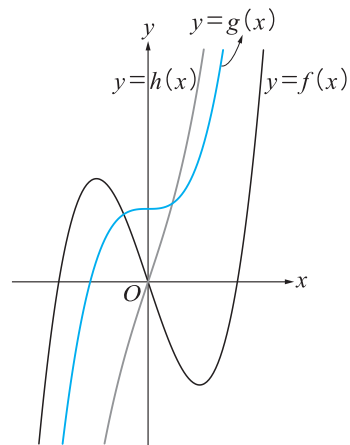
(2) 不等式  $(x-\alpha)(x-\beta)^4(x-\gamma)^3(x-\delta) \leq 0$  的解為  $x \leq \alpha$  或  $x = \beta$  或  $\gamma \leq x \leq \delta$ 。



## ● 基礎題

1. 已知  $y=2x^3+1$ ,  $y=2x^3-3x$ ,  $y=2x^3+3x$  的圖形如右所示，試完成各圖形配對（填入  $f(x)$ 、 $g(x)$  或  $h(x)$ ）：

- (1)  $y=2x^3-3x$  的圖形是  $y=$   $f(x)$  。(3分)  
 (2)  $y=2x^3+3x$  的圖形是  $y=$   $h(x)$  。(3分)  
 (3)  $y=2x^3+1$  的圖形是  $y=$   $g(x)$  。(4分)



**解** 三次多項式函數，

- (1)  $y=2x^3-3x$  在  $(0, 0)$  附近，  
圖形是往右下走的，故為  $y=f(x)$   
 (2)  $y=2x^3+3x$  在  $(0, 0)$  附近，  
圖形是往右上走的，故為  $y=h(x)$   
 (3)  $y=2x^3+1$  的圖形通過  $(0, 1)$ ，故為  $y=g(x)$

2. 試解下列不等式：

- (1)  $-x^2-5x+6 \geq 0$ 。(5分)  
 (2)  $x^2-2x-3 \geq 0$ 。(5分)

**解** (1)  $-x^2-5x+6 \geq 0$ ，即  $x^2+5x-6 \leq 0$

因式分解得  $(x-1)(x+6) \leq 0$

故  $-6 \leq x \leq 1$

即解為  $[-6, 1]$



(2)  $x^2-2x-3 \geq 0$

因式分解得  $(x-3)(x+1) \geq 0$

故  $x \leq -1$  或  $x \geq 3$

即解為  $(-\infty, -1] \cup [3, \infty)$



3. 若  $y=f(x)$  的圖形如右：

- (1) 試求  $f(1)$ ,  $f(3)$  的值。(6分)  
 (2) 若  $f(x)$  為三次多項式函數，試解  $f(x) > 0$ 。(4分)

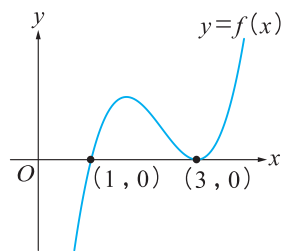
**解** (1) 由題圖可知

$$f(1)=0, f(3)=0$$

(2) 由題圖可知

$$f(x) > 0 \text{ 的解為 } 1 < x < 3 \text{ 或 } x > 3$$

$$\text{即 } (1, 3) \cup (3, \infty)$$



4. 下列圖形中有一個對稱於原點，試找出正確答案。(10分)

(A)  $f_1(x) = (x-1)^3 + 2(x-1)$

(B)  $f_2(x) = -x^2 + 2x$

(C)  $f_3(x) = -x^3 - 2x + 1$

(D)  $f_4(x) = -2x$

(E)  $f_5(x) = x^3 + 1$

解 (A) ×：對稱中心為(1, 0)

(B) ×：對稱軸為  $x=1$

(C) ×：對稱中心為(0, 1)

(D) ○：對稱於原點

(E) ×：對稱中心為(0, 1)

故選(D)

5. 已知  $f(x) = -2x^3 + 12x^2 - 3x - 25 = -2(x-2)^3 + 21(x-2) + 1$ ，則：

(1) 試說明如何平移  $y = -2x^3 + 21x$  的圖形得到  $y = -2x^3 + 12x^2 - 3x - 25$  的圖形？(4分)

(2) 試求  $y = f(x)$  圖形的對稱中心。(3分)

(3) 若  $f(2+\pi) = b$ ，試求  $f(2-\pi)$ 。(以  $b$  表示)(3分)

解 (1)  $y = -2x^3 + 21x$  的圖形向右平移 2 單位且向上平移 1 單位即為

$$\begin{aligned} y &= -2(x-2)^3 + 21(x-2) + 1 \\ &= -2x^3 + 12x^2 - 3x - 25 \text{ 的圖形} \end{aligned}$$

(2) 由(1)及  $y = -2x^3 + 21x$  以原點為對稱中心

故  $y = f(x)$  圖形的對稱中心為(2, 1)

(3)  $f(2+\pi) = -2\pi^3 + 21\pi + 1 = b$

$$\begin{aligned} f(2-\pi) &= -2(-\pi)^3 + 21(-\pi) + 1 = -(-2\pi^3 + 21\pi) + 1 \\ &= -(b-1) + 1 = 2-b \end{aligned}$$

〈另解〉

$(2+\pi, b)$  與  $(2-\pi, 2-b)$  對稱於(2, 1)

故  $f(2-\pi) = 2-b$

6. 三次函數  $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + x - 1$ ，試求：
- (1)  $f(x)$  在  $x=1$  附近的一次近似。(5分)
- (2)  $f(x)$  在  $x=-1$  附近的一次近似。(5分)

$$\begin{array}{r|l} 2 & -6 & +1 & -1 & 1 \\ +2 & -4 & -3 & & \\ \hline 2 & -4 & -3 & & -4 \\ +2 & -2 & & & \\ \hline 2 & -2 & & & -5 \\ +2 & & & & \\ \hline 2 & +0 & & & \end{array}$$

$$f(x) = 2(x-1)^3 - 5(x-1) - 4$$

故  $f(x)$  在  $x=1$  附近的一次近似為  $y = -5(x-1) - 4$

$$\begin{array}{r|l} 2 & -6 & +1 & -1 & -1 \\ -2 & +8 & -9 & & \\ \hline 2 & -8 & +9 & & -10 \\ -2 & +10 & & & \\ \hline 2 & -10 & & & +19 \\ -2 & & & & \\ \hline 2 & -12 & & & \end{array}$$

$$f(x) = 2(x+1)^3 - 12(x+1)^2 + 19(x+1) - 10$$

故  $f(x)$  在  $x=-1$  附近的一次近似為  $y = 19(x+1) - 10$

7. 若對所有的實數  $x$ ， $ax^2 - 2ax - 3 \leq 0$ ， $a \neq 0$  均成立，試求  $a$  的範圍。(10分)

解 二次函數的值恆小於或等於 0，故開口向下且判別式  $D \leq 0$

即  $a < 0$ ，且  $(-2a)^2 - 4 \cdot a \cdot (-3) \leq 0$

$$\text{得 } \begin{cases} a < 0 \\ 4a^2 + 12a \leq 0 \end{cases}, \text{ 即 } \begin{cases} a < 0 \\ 4a(a+3) \leq 0 \end{cases}$$



故  $-3 \leq a < 0$ ，即為  $[-3, 0)$

8. 試解下列不等式：

- (1)  $(2-x)(x+3)(x+4) < 0$ 。(3分)      (2)  $(x+2)(x+3)(x+4)^2 < 0$ 。(3分)
- (3)  $(x+2)(x+3)(x+4)^2 \leq 0$ 。(4分)

解 (1)  $(2-x)(x+3)(x+4) < 0$

$$\text{即 } (x-2)(x+3)(x+4) > 0$$

故  $-4 < x < -3$  或  $x > 2$ ，即  $(-4, -3) \cup (2, \infty)$

- (2) 在  $x=-2$ ， $x=-3$  兩側異號

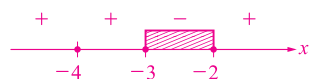
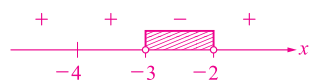
在  $x=-4$  兩側不變號

由因式分解後的正負判斷

故  $-3 < x < -2$ ，即  $(-3, -2)$

- (3) 同(2)，由因式分解後的正負判斷

故  $-3 \leq x \leq -2$  或  $x = -4$ ，即  $[-3, -2] \cup [-4, -4]$



### ● 進階題

9. 設三次函數  $y=f(x)=a(x+1)^3+p(x+1)+k$  的大域特徵函數圖形近似於  $y=-2x^3$ ，且  $f(x)$  的對稱中心  $(-1, 4)$ ，又  $f(1)=2$ ，試求序組  $(a, p, k) = \underline{\quad (-2, 7, 4) \quad}$ 。  
(10分)

**解** 由  $y=f(x)$  的大域特徵圖形近似於  $y=-2x^3$   
 知  $a=-2$   
 又由對稱中心  $(-1, 4)$  知  $f(-1)=4 \Rightarrow k=4$   
 $\therefore f(x)=-2(x+1)^3+p(x+1)+4$   
 $\therefore f(1)=2$   
 $\Rightarrow -2 \cdot 2^3+p \cdot 2+4=2 \Rightarrow p=7$   
 故序組  $(a, p, k)=(-2, 7, 4)$

10. 設  $f(x)=x^3-3x+2$ ，下列關於函數  $y=f(x)$  的圖形之描述，試選出正確的選項。  
(10分)

- (A)  $y=f(x)$  的圖形通過點  $(1, 0)$   
 (B)  $y=f(x)$  的圖形與  $x$  軸只有一個交點  
 (C) 點  $(0, 2)$  是  $y=f(x)$  的圖形之對稱中心  
 (D)  $y=f(x)$  的圖形在對稱中心附近會近似於一直線  $y=3x-6$   
 (E)  $y=x^3+3x^2$  的圖形可由  $y=f(x)$  的圖形經適當平移得到

**解** (A) ○：因  $f(1)=1^3-3 \cdot 1+2=0$   
 (B) ×：因  $x^3-3x+2=(x-1)^2(x+2)$ ，故  $y=f(x)$  與  $x$  軸交 2 相異點  
 (C) ○： $y=f(x)$  以  $(0, 2)$  為對稱中心  
 (D) ×： $y=f(x)$  在  $x=0$  處的一次近似為  $y=-3x+2$   
 (E) ○： $y=x^3+3x^2=(x+1)^3-3(x+1)+2$  的圖形可由  $y=f(x)$  向左平移 1 單位  
 故選(A)(C)(E)