4-3 圓與直線的關係

一、圓的定義

平面上到一定點 O 等距離的所有點所形成的圖形稱為一個圓，該定點 O 稱為圓心，圓心與圓上任一點的距離稱為半徑。

二、圓的方程式

1. 標準式：圓心為 $A(h, k)$，半徑為 r 的圓方程式為 $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$。
2. 一般式：平面上圓之方程式皆是二元二次方程式，形如 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$。
   但是，二元二次方程式 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 的圖形 S 未必是一圓，其判定如下：
   (1) 若 $d^2+e^2-4f>0$，則 S 為一圓。
   (2) 若 $d^2+e^2-4f=0$，則 S 為一點。
   (3) 若 $d^2+e^2-4f<0$，則 S 無圖形。

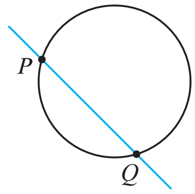
三、圓與點的關係

1. 點 $P(x_0, y_0)$，圓 C：$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$，
   (1) 若點 P 在圓 C 內，則 $(x_0-h)^2+(y_0-k)^2<r^2$。
   (2) 若點 P 在圓 C 上，則 $(x_0-h)^2+(y_0-k)^2=r^2$。
   (3) 若點 P 在圓 C 外，則 $(x_0-h)^2+(y_0-k)^2>r^2$。
2. 點 $P(x_0, y_0)$，圓 C：$x^2+y^2+dx+ey+f=0$，
   (1) 若點 P 在圓 C 內，則 $x_0^2+y_0^2+dx_0+ey_0+f<0$。
   (2) 若點 P 在圓 C 上，則 $x_0^2+y_0^2+dx_0+ey_0+f=0$。
   (3) 若點 P 在圓 C 外，則 $x_0^2+y_0^2+dx_0+ey_0+f>0$。

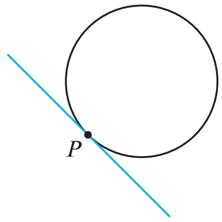
四、圓與直線的關係

平面上，一個圓與一條直線的關係有下列三種情形：

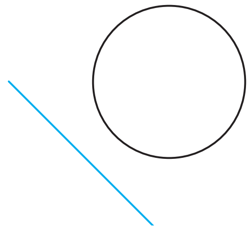
1. 交於兩點：圓與直線交於相異兩點，此時直線稱為圓的割線，如圖(一)。
2. 相切：圓與直線交於一點，此時直線稱為圓的切線，交點稱為圓的切點，如圖(二)。
3. 不相交：圓與直線沒有交點，如圖(三)。



圖(一)　交於兩點



圖(二)　相切



圖(三)　不相交

五、圓與直線的關係判定

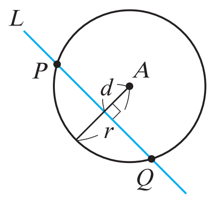
1. 幾何判別法：

設圓 C 的圓心為點 A，半徑為 r，圓心 A 到直線 L 的距離為 d，由 d 與 r 的大小關係可以歸納出下列三種情形：

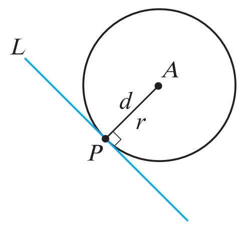
(1) 若 $d<r$，則圓 C 與直線 L 交於兩點，如圖(四)。

(2) 若 $d=r$，則圓 C 與直線 L 相切，如圖(五)。

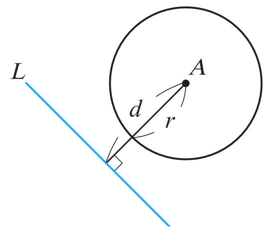
(3) 若 $d>r$，則圓 C 與直線 L 不相交，如圖(六)。



圖(四)　$d<r$



圖(五)　$d=r$



圖(六)　$d>r$

2. 代數判別法：

考慮聯立方程式 $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ x^2+y^2+dx+ey+f=0 \end{cases}$，整理後可得 $Ax^2+Bx+C=0$，

(1) 當 $B^2-4AC>0$ 時，聯立方程式有兩組相異實數解，表示圓與直線交於相異兩點。

(2) 當 $B^2-4AC=0$ 時，聯立方程式有兩組相等實數解，表示圓與直線相切。

(3) 當 $B^2-4AC<0$ 時，聯立方程式無實數解，表示圓與直線不相交。

六、圓的切線方程式

1. 點在圓上求切線：

(1) 若 $P(x_0,y_0)$ 為已知定點，且在圓 $C：(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 上，過 P 的切線為 L，

① 設 $Q(x,y)$ 為切線 L 上任一點且圓心 $A(h,k)$，

因為 $\overleftrightarrow{PA}\perp\overleftrightarrow{QP}$，所以 $\dfrac{y_0-k}{x_0-h}\times\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=-1$，

故得 $(x_0-h)(x-x_0)+(y_0-k)(y-y_0)=0$。

② 由①所得結果可改寫為

$(x_0-h)((x-h)+(h-x_0))+(y_0-k)((y-k)+(k-y_0))=0$，

化簡得 $(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=(x_0-h)^2+(y_0-k)^2$，

故得 $(x_0-h)(x-h)+(y_0-k)(y-k)=r^2$。

(2) 若 $P(x_0,y_0)$ 為已知定點，且在圓 $C：x^2+y^2+dx+ey+f=0$ 上，過 P 的切線為 L，

① 設 $Q(x,y)$ 為切線 L 上任一點且圓心 $A\left(-\frac{d}{2},-\frac{e}{2}\right)$，

因為 $\overleftrightarrow{PA}\perp\overleftrightarrow{QP}$，所以 $\dfrac{y_0+\frac{e}{2}}{x_0+\frac{d}{2}}\times\dfrac{y-y_0}{x-x_0}=-1$，

故得 $\left(x_0+\frac{d}{2}\right)(x-x_0)+\left(y_0+\frac{e}{2}\right)(y-y_0)=0$。

② 由①所得結果可改寫為

$\left(x_0+\frac{d}{2}\right)x+\left(y_0+\frac{e}{2}\right)y=\left(x_0+\frac{d}{2}\right)x_0+\left(y_0+\frac{e}{2}\right)y_0$，

化簡得 $x_0x+\frac{d}{2}(x+x_0)+y_0y+\frac{e}{2}(y+y_0)=x_0^2+dx_0+y_0^2+ey_0$，

故得 $x_0x+y_0y+d\left(\dfrac{x+x_0}{2}\right)+e\left(\dfrac{y+y_0}{2}\right)+f=0$。

（因 $x_0^2+dx_0+y_0^2+ey_0+f=0$）

2. 點在圓外求切線：

若 $P(x_0,y_0)$ 為已知定點，且在圓 $C：(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ 外，則過 P 與圓 C 相切的切線有兩條，

① 設切線斜率為 m，則切線方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$。

② 考慮聯立方程式 $\begin{cases}y-y_0=m(x-x_0)\\(x-h)^2+(y-k)^2=r^2\end{cases}$，整理後可得 $Ax^2+Bx+C=0$，利用相切時滿足 $B^2-4AC=0$，求出斜率 m，即可得切線方程式。

註：解出的 m 一般有兩個值，若僅有一值，表示還有一條鉛直切線 $x-x_0=0$。

3. 已知斜率 m 求切線：

① 若 m 為所求切線的斜率，假設切線方程式為 $y=mx+k$。

② 考慮聯立方程式 $\begin{cases}y=mx+k\\(x-h)^2+(y-k)^2=r^2\end{cases}$，整理後可得 $Ax^2+Bx+C=0$，利用相切時滿足 $B^2-4AC=0$，求出 k，即可得切線方程式。

註：解出的 k 有兩個值。

基礎題

1. 下列哪些點在圓 $x^2+y^2-6x-2y-1=0$ 的內部？（10 分）

(A)（0，0）　(B)（2，5）　(C)（3，－2）　(D)（－2，3）　(E)（－1，－1）

解 將各點代入 $x^2+y^2-6x-2y-1$

(A) ○：$0+0-0-0-1=-1<0$

(B) ×：$2^2+5^2-6\times2-2\times5-1=6>0$

(C) ○：$3^2+(-2)^2-6\times3-2\times(-2)-1=-2<0$

(D) ×：$(-2)^2+3^2-6\times(-2)-2\times3-1=18>0$

(E) ×：$(-1)^2+(-1)^2-6\times(-1)-2\times(-1)-1=9>0$

故選(A)(C)

2. 試求滿足下列條件的圓方程式：

(1) 圓心在（－2，1），半徑為 3 的圓。（3 分）

(2) 以點 $A(2,-1)$ 為圓心，且通過點 $B(-1,1)$ 的圓。（3 分）

(3) 以兩點 $A(2,-3)$，$B(-6,1)$ 為直徑兩端點的圓。（4 分）

解 (1) 由圓的標準式，得 $(x+2)^2+(y-1)^2=9$

(2) 圓的半徑為 $\overline{AB}=\sqrt{(2-(-1))^2+((-1)-1)^2}=\sqrt{13}$

由圓的標準式，得 $(x-2)^2+(y+1)^2=13$

(3) 直徑 $\overline{AB}$ 的中點（－2，－1）為圓心

半徑為 $\dfrac{\overline{AB}}{2}=\dfrac{\sqrt{(2-(-6))^2+((-3)-1)^2}}{2}=2\sqrt{5}$

由圓的標準式，得 $(x+2)^2+(y+1)^2=20$

3. 若 $x^2+y^2+2x-2ky+2k^2+2k-2=0$ 的圖形表示一個圓，且圓心在第二象限內，試求 k 值的最大可能範圍。（10 分）

解 將 $x^2+y^2+2x-2ky+2k^2+2k-2=0$ 分別對 x，y 配方

得 $(x+1)^2+(y-k)^2=-k^2-2k+3$

若圖形為一個圓，且圓心在第二象限內，則

$-k^2-2k+3>0$ 且 $k>0$，得 $-3<k<1$ 且 $k>0$，故 $0<k<1$

4. 試求滿足下列條件的圓方程式：

(1) 過 $A(0,1)$，$B(0,6)$，$C(3,0)$ 三點的圓。（5 分）

(2) 過 $A(1,2)$，$B(3,2)$ 兩點且圓心在直線 $2x-y=3$ 上的圓。（5 分）

解 (1) 設圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

將 A，B，C 三點代入得

$$\begin{cases}1+e+f=0\\36+6e+f=0\\9+3d+f=0\end{cases}，即\begin{cases}e+f=-1\cdots\cdots①\\6e+f=-36\cdots\cdots②\\3d+f=-9\cdots\cdots③\end{cases}$$

解①、②得 $e=-7$，$f=6$

代入③得 $d=-5$

故圓方程式為 $x^2+y^2-5x-7y+6=0$

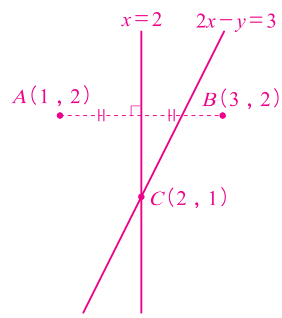
(2) 因為 $\overline{AB}$ 為一弦

所以圓心必在 $\overline{AB}$ 的中垂線上，其方程式為 $x=2$

$\Rightarrow$圓心為 $x=2$ 與 $2x-y=3$ 的交點 $C(2,1)$

半徑為 $\overline{AC}=\sqrt{(1-2)^2+(2-1)^2}=\sqrt{2}$

故圓方程式為 $(x-2)^2+(y-1)^2=2$



5. 已知直線 L：$x-2y+6=0$ 與圓 C：$(x+1)^2+y^2=t$，試求在下列關係時 t 的範圍：

(1) 直線 L 與圓 C 交於兩點。（3 分）

(2) 直線 L 與圓 C 相切。（3 分）

(3) 直線 L 與圓 C 不相交。（4 分）

解 〈解法一〉

圓 C 的圓心為 $A(-1,0)$，半徑 $r=\sqrt{t}$

A 到 L 的距離 $d=\dfrac{|-1-2\times0+6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=\sqrt{5}$

(1) L 與圓 C 交於兩點，則 $d<r$，即 $\sqrt{5}<\sqrt{t}$，故 $t>5$

(2) L 與圓 C 相切，則 $d=r$，即 $\sqrt{5}=\sqrt{t}$，故 $t=5$

(3) L 與圓 C 不相交，則 $d>r$，即 $\sqrt{5}>\sqrt{t}$，故 $t<5$，又 $t>0$，故得 $0<t<5$

〈解法二〉

考慮聯立方程式 $\begin{cases}x-2y+6=0\cdots\cdots①\\(x+1)^2+y^2=t\cdots\cdots②\end{cases}$

由①式得 $x=2y-6$，代入②式可得 $(2y-5)^2+y^2=t$

即 $5y^2-20y+(25-t)=0$

令判別式 $D=(-20)^2-4\times5\times(25-t)=20(t-5)$

(1) L 與圓 C 交於兩點，則 $D=20(t-5)>0$，故 $t>5$

(2) L 與圓 C 相切，則 $D=20(t-5)=0$，故 $t=5$

(3) L 與圓 C 不相交，則 $D=20(t-5)<0$，故 $t<5$，又 $t>0$，故得 $0<t<5$

6. 試求過點 $P(-4,4)$ 且與圓 $C: x^2+y^2+10x-4y+24=0$ 相切之切線方程式。（10 分）

解　〈解法一〉

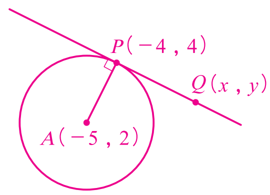
圓 $C: x^2+y^2+10x-4y+24=0$，即 $(x+5)^2+(y-2)^2=5$

圓心 $A(-5,2)$

點 $P(-4,4)$ 在圓 C 上

在切線 L 上任取異於 P 的一點 $Q(x,y)$

由 $\overline{AP}\perp\overline{PQ}$，兩垂直直線的斜率乘積等於 -1



得 $\dfrac{4-2}{(-4)-(-5)}\cdot\dfrac{y-4}{x-(-4)}=-1$，所以 $x+2y-4=0$

即切線方程式為 $x+2y-4=0$

〈解法二〉

因為點 P 在圓 C 上

所以由切線方程式的公式得所求為

$$-4\cdot x+4\cdot y+10\cdot\frac{x+(-4)}{2}-4\cdot\frac{y+4}{2}+24=0$$

整理得 $x+2y-4=0$

7. 設圓 $C: (x-1)^2+(y+2)^2=9$，試求通過圓外一點 $P(6,-2)$ 且與圓 C 相切的直線方程式。（10 分）

解　圓 C 的圓心 $A(1,-2)$，半徑 $r=3$

設切線 L 的方程式為 $y-(-2)=m(x-6)$，即 $mx-y-6m-2=0$

由 A 到 L 的距離 d 與 r 相等

得 $\dfrac{|m\times1-(-2)-6m-2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=3$

所以 $|-5m|=3\sqrt{m^2+1}$，兩邊平方得 $25m^2=9(m^2+1)$

即 $16m^2=9$，故 $m=\pm\dfrac{3}{4}$

故得切線方程式為 $y+2=\pm\dfrac{3}{4}(x-6)$

即 $3x-4y-26=0$ 及 $3x+4y-10=0$

進階題

8. 已知兩點 $A(4，3)$，$B(5，-2)$，試求：

⑴ 滿足 $2\overline{PA}=3\overline{PB}$ 的所有點 P 所形成圖形的方程式。（5 分）

⑵ 滿足 $2\overline{PA}\leq 3\overline{PB}$ 的所有點 P 所形成圖形的不等式。（5 分）

解 ⑴ 設點 $P(x，y)$

由 $2\ \overline{PA}=3\ \overline{PB}$ 得 $2\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=3\sqrt{(x-5)^2+(y-(-2))^2}$

兩邊平方得 $4((x-4)^2+(y-3)^2)=9((x-5)^2+(y+2)^2)$

整理得 $5x^2+5y^2-58x+60y+161=0$，即為所求

⑵ 設點 $P(x，y)$

由 $2\ \overline{PA}\leq 3\ \overline{PB}$ 得 $2\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}\leq 3\sqrt{(x-5)^2+(y-(-2))^2}$

兩邊平方得 $4((x-4)^2+(y-3)^2)\leq 9((x-5)^2+(y+2)^2)$

整理得 $5x^2+5y^2-58x+60y+161\geq 0$，即為所求

9. 已知圓 $C：2x^2+2y^2-8x-5y+k=0$，

⑴ 若圓 C 與 x 軸相切，則 k 值為何？（5 分）

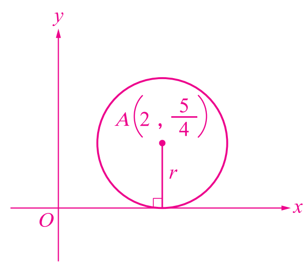
⑵ 若圓 C 與 y 軸相切，則 k 值為何？（5 分）

解 〈解法一〉

圓 $C：2x^2+2y^2-8x-5y+k=0$，

即 $(x-2)^2+\left(y-\frac{5}{4}\right)^2=-\frac{k}{2}+\frac{89}{16}$

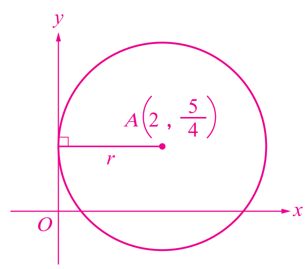
圓心 $A\left(2，\frac{5}{4}\right)$，半徑 $r=\sqrt{-\frac{k}{2}+\frac{89}{16}}$



圖㈠

⑴ 由圖㈠，圓 C 與 x 軸相切得 $r=\sqrt{-\frac{k}{2}+\frac{89}{16}}=\frac{5}{4}$，

兩邊平方得 $-\frac{k}{2}+\frac{89}{16}=\frac{25}{16}$，故 $k=8$



圖㈡

⑵ 由圖㈡，圓 C 與 y 軸相切得 $r=\sqrt{-\frac{k}{2}+\frac{89}{16}}=2$，

兩邊平方得 $-\frac{k}{2}+\frac{89}{16}=4$，故 $k=\frac{25}{8}$

〈解法二〉

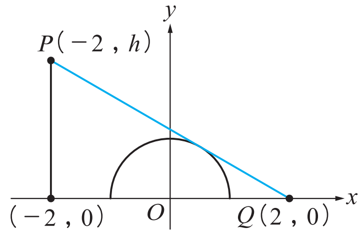
⑴ 考慮聯立方程式 $\begin{cases}2x^2+2y^2-8x-5y+k=0\\ y=0\end{cases}$，即 $2x^2-8x+k=0$

因為圓 C 與 x 軸相切，所以判別式 $D=(-8)^2-4\times 2\times k=0$，故 $k=8$

⑵ 考慮聯立方程式 $\begin{cases}2x^2+2y^2-8x-5y+k=0\\ x=0\end{cases}$，即 $2y^2-5y+k=0$

因為圓 C 與 y 軸相切，所以判別式 $D=(-5)^2-4\times 2\times k=0$，故 $k=\frac{25}{8}$

10. 如右圖，設 $h>0$，點 $P(-2，h)$ 處有一光源，$\Gamma：x^2+y^2=1$ $(y\geq 0)$ 為半圓形障礙。若光源要照到點 $Q(2，0)$，試求 h 的最小值。(10 分)



解 當 h 有最小值時，$\overleftrightarrow{PQ}$ 即半圓的切線

設 $\overleftrightarrow{PQ}：y-0=m(x-2)$，即 $mx-y-2m=0$

由 O 到 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的距離即半徑 1

得 $\dfrac{|0-0-2m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=1$

所以 $|-2m|=\sqrt{m^2+1}$，兩邊平方得 $4m^2=m^2+1$，即 $3m^2=1$

得 $m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$（正不合），故 $m=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

故得 $\overleftrightarrow{PQ}$ 的方程式為 $y=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(x-2)$

$P(-2，h)$ 代入得 $h=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-2-2)=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

即 h 的最小值為 $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$