第 1 章 綜合演練

____年____月____日

得分	

一、單選題（每題 7 分，共 21 分）

（ (C) ） 1. 下列何者是有理數？

(A) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$　(B) π　(C) 3.141592

(D) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$　(E) $\sqrt{12}$

解 (A)(B)(D)(E)皆為無理數
(C) 3.141592 為有理數
故選(C)

（ (D) ） 2. 下列哪一個數值最大？

(A) $\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3}$　(B) $\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}$　(C) $\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}{4}$

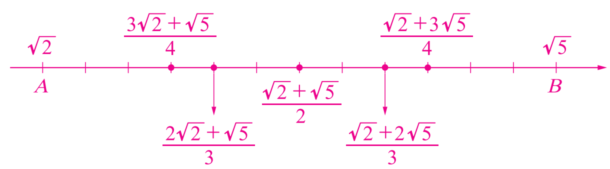
(D) $\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{4}$　(E) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{5}}{2}$

解 先通分

$\dfrac{\sqrt{2}+2\sqrt{5}}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}+8\sqrt{5}}{12}$，$\dfrac{2\sqrt{2}+\sqrt{5}}{3}=\dfrac{8\sqrt{2}+4\sqrt{5}}{12}$

$\dfrac{3\sqrt{2}+\sqrt{5}}{4}=\dfrac{9\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{12}$，$\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{4}=\dfrac{3\sqrt{2}+9\sqrt{5}}{12}$

令 $A(\sqrt{2})$，$B(\sqrt{5})$，將 $\overline{AB}$ 作 12 等分，由分點公式可得如下圖



所以 $\dfrac{\sqrt{2}+3\sqrt{5}}{4}$ 最大，故選(D)

（ (A) ） 3. 實數 $\sqrt{10+\sqrt{11}}$ 的整數部分為何？

(A) 3　(B) 4　(C) 5

(D) 6　(E) 7

解 因為 $3<\sqrt{11}<4$，所以 $13<10+\sqrt{11}<14$

因此 $9<10+\sqrt{11}<16$，可得 $3<\sqrt{10+\sqrt{11}}<4$

故選(A)

二、多選題（每題 8 分，錯一個選項得 5 分，錯兩個選項得 2 分，其餘不給分，共 16 分）

（(A)(B)(C)(E)） 4. 已知實數 x，y 滿足 $|x-3|\leq 2$ 且 $x+y=6$，則下列各式之範圍哪些正確？

(A) $1\leq x\leq 5$　(B) $\frac{1}{5}\leq\frac{1}{x}\leq 1$　(C) $1\leq y\leq 5$

(D) $xy\geq 10$　(E) $\frac{1}{5}\leq\frac{x}{y}\leq 5$

解 (A) ○：因為 $|x-3|\leq 2$，則 $-2\leq x-3\leq 2$，故 $1\leq x\leq 5$

(B) ○：由(A)知，$\frac{1}{5}\leq\frac{1}{x}\leq 1$

(C) ○：因為 $x+y=6$，則 $y=6-x$

由(A)，故 $1\leq y\leq 5$

(D) ×：由算幾不等式知 $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$，即 $3\geq\sqrt{xy}$，得 $xy\leq 9$

(E) ○：$\frac{x}{y}=\frac{6-y}{y}=\frac{6}{y}-1$，又由(C)知 $\frac{1}{5}\leq\frac{1}{y}\leq 1$，故 $\frac{1}{5}\leq\frac{x}{y}\leq 5$

故選(A)(B)(C)(E)

（(A)(B)） 5. 下列哪些選項正確？

(A) $0.3\overline{6}<\dfrac{2}{5}$

(B) $\sqrt{11}<\sqrt{3}+\sqrt{8}$

(C) a，b 為實數，若 $a+b\sqrt{2}=\sqrt{2}$，則 $a=0$，$b=1$

(D) $\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}$ 為無理數

(E) a，b 為實數，若 $0<a<1$ 且 $0<b<1$，則 $0<\dfrac{a}{b}<1$

解 (A) ○：$0.3\overline{6}=\dfrac{36-3}{90}=\dfrac{33}{90}=\dfrac{11}{30}<\dfrac{12}{30}=\dfrac{2}{5}$

(B) ○：$(\sqrt{11})^2=11<(\sqrt{3}+\sqrt{8})^2=3+8+2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{8}$

故 $\sqrt{11}<\sqrt{3}+\sqrt{8}$

(C) ×：考慮 $\sqrt{2}+0\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}$，則 $a=\sqrt{2}$，$b=0$，即為一反例

(D) ×：$\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{8}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}$ 為有理數

(E) ×：考慮 $a=0.5$，$b=0.1$，則 $\dfrac{a}{b}=5>1$，即為一反例

故選(A)(B)

三、填充題（每格 7 分，共 63 分）

6. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}}=\dfrac{b}{a}$，其中 a，b 為整數且 $\dfrac{b}{a}$ 為最簡分數，試求 $a+b=$ <u>17</u>。

解 $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{3}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\dfrac{7}{3}}}=\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{7}}=\dfrac{1}{\dfrac{10}{7}}=\dfrac{7}{10}$

故 $a+b=10+7=17$

7. $\sqrt{24}+\sqrt{3}(\sqrt{12}-\sqrt{18})=a+b\sqrt{6}$，其中 a，b 為有理數，則數對 $(a,b)=$ <u>$(6,-1)$</u>。

解 $\sqrt{24}=\sqrt{2^3\times3}=2\sqrt{6}$，$\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$，$\sqrt{18}=\sqrt{3^2\times2}=3\sqrt{2}$

所以 $\sqrt{24}+\sqrt{3}(\sqrt{12}-\sqrt{18})=2\sqrt{6}+\sqrt{3}(2\sqrt{3}-3\sqrt{2})$

$=2\sqrt{6}+6-3\sqrt{6}=6-\sqrt{6}$

故數對 $(a,b)=(6,-1)$

8. 已知實數 x，y 滿足 $x-y=\sqrt{2}$，$x^2+y^2=8$，試求下列各式的值：

(1) $xy=$ __3__。

(2) $x^3-y^3=$ __$11\sqrt{2}$__。

解 (1) $(x-y)^2=x^2+y^2-2xy$

得 $(\sqrt{2})^2=8-2xy$

故 $xy=3$

(2) $x^3-y^3=(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$=\sqrt{2}\cdot(8+3)$

$=11\sqrt{2}$

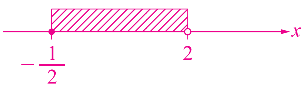
9. 不等式 $|2x+1|<x+3$ 的解為 $a<x<b$，試求 $a+b=$ __$\frac{2}{3}$__。

解 絕對值變號的關鍵在 $x=-\frac{1}{2}$ 處

因此將實數 x 分成兩個範圍 $x\geq-\frac{1}{2}$，$x<-\frac{1}{2}$ 分開討論：

① $x\geq-\frac{1}{2}$ 時，$2x+1<x+3$ 得 $x<2$，

故 $-\frac{1}{2}\leq x<2$



② $x<-\frac{1}{2}$ 時，$-(2x+1)<x+3$ 得 $3x>-4$，

即 $x>-\frac{4}{3}$，因此 $-\frac{4}{3}<x<-\frac{1}{2}$

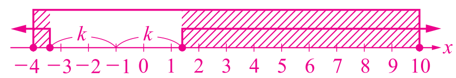
由①、②得 $-\frac{4}{3}<x<2$

故 $a+b=-\frac{4}{3}+2=\frac{2}{3}$

10. 設 k 為正實數且同時滿足絕對值不等式 $|x-3|\le 7$ 與 $|x+1|\ge k$ 的整數 x 共有 10 個，則正實數 k 的最大可能範圍為 $\underline{\ 2<k\le 3\ }$。

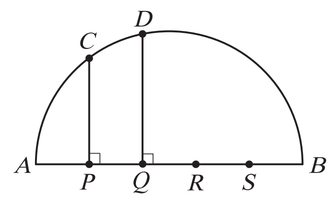
解 $|x-3|\le 7$ 的解為 $-4\le x\le 10$，其中共有 15 個整數

$|x+1|\ge k$ 的解為與 -1 的距離大於或等於 k 的實數



如右圖，當 $2<k\le 3$ 時，可使得滿足條件的整數 x 共有 10 個

11. 如右圖，以 $\overline{AB}$ 為直徑作半圓，P、Q、R、S 五等分直徑，點 C、D 在圓周上且 $\overline{CP}\perp\overline{AB}$，$\overline{DQ}\perp\overline{AB}$，若 $\overline{AB}=10$，試求：



(1) $\overline{CP}=\underline{\ 4\ }$。

(2) $\overline{DQ}=\underline{\ 2\sqrt{6}\ }$。

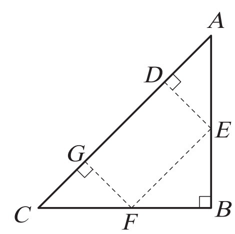
解 (1) $\overline{AP}=2$，$\overline{PB}=8$

$\overline{CP}=\sqrt{2\times 8}=4$

(2) $\overline{DQ}=\sqrt{4\times 6}=2\sqrt{6}$

12. 如右圖，有一塊斜邊長為 12 公尺的等腰直角三角形形狀的花圃，今欲在此花圃中挖出一個面積最大的矩形水池，且水池的一邊是在三角形的斜邊上，則此水池的最大面積為 $\underline{\ 18\ }$ 平方公尺。

（提示：設 $\overline{AD}=a$ 公尺，$\overline{DG}=b$ 公尺）



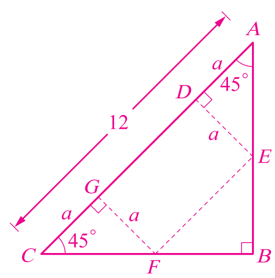
解 設 $\overline{AD}=a$ 公尺，$\overline{DG}=b$ 公尺

$\because \angle ADE=\angle CGF=90^\circ$

$\therefore \triangle ADE$ 與 $\triangle CGF$ 為等腰直角三角形

則 $\overline{AD}=\overline{DE}=\overline{GF}=\overline{GC}=a$

$\overline{AC}=a+b+a=12$，即 $2a+b=12$ 且 $a>0$，$b>0$



矩形水池的面積為 ab，由算幾不等式知

$\dfrac{2a+b}{2}\ge\sqrt{2a\cdot b}$，即 $6\ge\sqrt{2ab}$，得 $ab\le 18$

故此水池的最大面積為 18 平方公尺