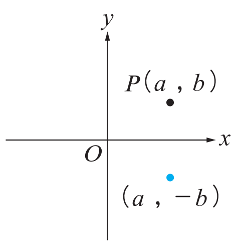
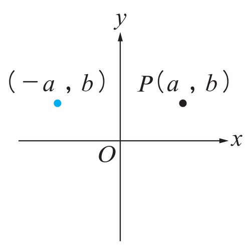
3-2 簡單多項式函數及其圖形

一、坐標圖形的對稱性

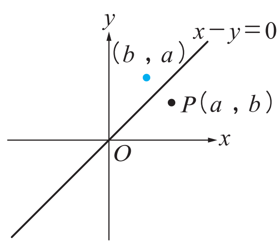
1. 設 $P(a，b)$ 為坐標平面上一點，則：
   (1) P 對 x 軸的對稱點為 $(a，-b)$，如圖(一)。
   (2) P 對 y 軸的對稱點為 $(-a，b)$，如圖(二)。
   (3) P 對直線 $x-y=0$ 的對稱點為 $(b，a)$，如圖(三)。
   (4) P 對原點的對稱點為 $(-a，-b)$，如圖(四)。



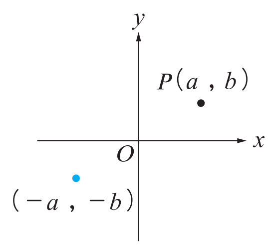
圖(一)



圖(二)



圖(三)



圖(四)

2. 平面上的中點坐標公式：
   設 $P(a_1，b_1)$，$Q(a_2，b_2)$，則線段 $\overline{PQ}$ 的中點坐標為 $\left(\dfrac{a_1+a_2}{2}，\dfrac{b_1+b_2}{2}\right)$。

二、函數的意義

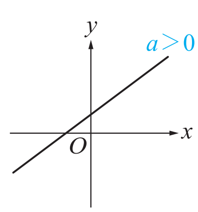
1. 設 x 與 y 是兩個變數，當 x 的值給定時，y 的值也跟著唯一確定，我們稱 y 為 x 的函數，其中 x 稱為自變數，y 稱為應變數。若此函數命名為 f，則用記號 $y=f(x)$ 表示，並以 $f(a)$ 表示當 $x=a$ 時所對應的函數值。
2. 函數的圖形：坐標平面上，所有坐標為 $(x，f(x))$ 的點所成的圖形，稱為函數 $f(x)$ 的圖形。

三、常數函數的圖形

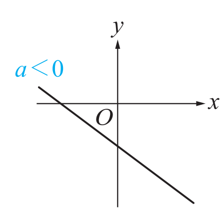
$f(x)=c$，其中 c 為常數，是一條通過 $(0，c)$ 的水平直線。

四、一次函數

1. 定義：設 a，b 為實數，形如 $f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ 的函數稱為一次函數。
2. 一次函數 $f(x)=ax+b$ $(a\neq 0)$ 的圖形為一條直線：a 值的正負與傾斜方向有關，b 值決定直線與 y 軸的交點位置。
   (1) $a>0$，直線左下右上傾斜，如圖(五)。
   (2) $a<0$，直線左上右下傾斜，如圖(六)。

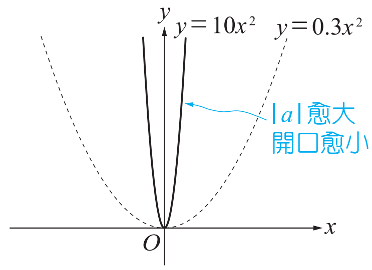


圖(五)



圖(六)

五、二次函數

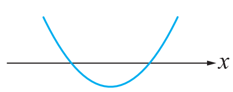
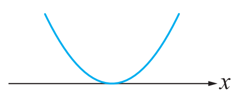
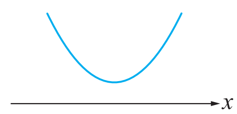
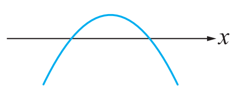
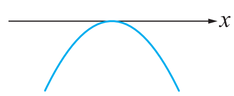
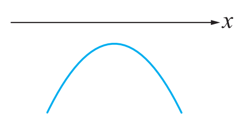


$f(x)=ax^2+bx+c$，其中 a，b，c 為實數，$a\neq0$，稱為二次函數，圖形為拋物線。

1. 二次函數圖形的開口方向與大小：
   (1) $|a|$ 愈大，開口愈小。
   (2) $a>0$ 時，開口向上；$a<0$ 時，開口向下。
2. 利用配方法求二次函數的圖形：

拋物線	$f(x)=ax^2+bx+c$	$f(x)=a(x-h)^2+k$
頂點	$\left(-\dfrac{b}{2a}，-\dfrac{b^2-4ac}{4a}\right)$	$(h，k)$
對稱軸	$x=-\dfrac{b}{2a}$	$x=h$

3. 二次函數圖形的分類：
   若令判別式 $D=b^2-4ac$，
   (1) $D>0$ 時，圖形與 x 軸有兩交點。
   (2) $D=0$ 時，圖形與 x 軸有一交點。
   (3) $D<0$ 時，圖形與 x 軸不相交。

	$b^2-4ac>0$	$b^2-4ac=0$	$b^2-4ac<0$
$a>0$			
$a<0$			

六、圖形的平移

1. 水平平移：
   (1) 一次函數：$f(x)=ax+b$ 水平平移 h 單位為 $y=a(x-h)+b$。
   (2) 二次函數：$f(x)=ax^2+bx+c$ 水平平移 h 單位為 $y=a(x-h)^2+b(x-h)+c$。
2. 鉛直平移：
   (1) 一次函數：$f(x)=ax+b$ 鉛直平移 k 單位為 $y=ax+b+k$。
   (2) 二次函數：$f(x)=ax^2+bx+c$ 鉛直平移 k 單位為 $y=ax^2+bx+c+k$。

因此 $y=ax^2$ 水平平移 h 單位，鉛直平移 k 單位會成為 $y=a(x-h)^2+k$。

註：當 $h>0$、$h<0$ 分別表示向右、向左平移；當 $k>0$、$k<0$ 分別表示向上、向下平移

基礎題

1. 已知 $A(0,1)$，$B(2,0)$，$C(3,2)$，試求：

(1) A、B、C 三點對 x 軸的對稱點坐標。（3 分）

(2) A、B、C 三點對 y 軸的對稱點坐標。（3 分）

(3) A、B、C 三點對直線 $x=y$ 的對稱點坐標。（3 分）

(4) A、B、C 三點對原點的對稱點坐標。（3 分）

(5) $\overline{AC}$ 的中點坐標。（3 分）

解 (1) A 點對 x 軸的對稱點為 $(0,-1)$，B 點對 x 軸的對稱點為 $(2,0)$

C 點對 x 軸的對稱點為 $(3,-2)$

(2) A 點對 y 軸的對稱點為 $(0,1)$，B 點對 y 軸的對稱點為 $(-2,0)$

C 點對 y 軸的對稱點為 $(-3,2)$

(3) A 點對 $x=y$ 的對稱點為 $(1,0)$，B 點對 $x=y$ 的對稱點為 $(0,2)$

C 點對 $x=y$ 的對稱點為 $(2,3)$

(4) A 點對原點的對稱點為 $(0,-1)$，B 點對原點的對稱點為 $(-2,0)$

C 點對原點的對稱點為 $(-3,-2)$

(5) $\overline{AC}$ 的中點坐標為 $\left(\dfrac{0+3}{2},\dfrac{1+2}{2}\right)=\left(\dfrac{3}{2},\dfrac{3}{2}\right)$

2. 試利用配方法，將下列各二次函數配方：

(1) $f(x)=-2x^2-x+3$。（4 分）

(2) $f(x)=x^2-2bx+1$。（4 分）

(3) $f(x)=ax^2-x+1$。（4 分）

解

(1) $f(x)=-2x^2-x+3=-2\left(x^2+\dfrac{1}{2}x\right)+3=-2\left(\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2-\dfrac{1}{16}\right)+3$

$=-2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{1}{8}+3=-2\left(x+\dfrac{1}{4}\right)^2+\dfrac{25}{8}$

(2) $f(x)=x^2-2bx+1=(x^2-2bx)+1=((x-b)^2-b^2)+1$

$=(x-b)^2+1-b^2$

(3) $f(x)=ax^2-x+1=a\left(x^2-\dfrac{1}{a}x\right)+1=a\left(\left(x-\dfrac{1}{2a}\right)^2-\dfrac{1}{4a^2}\right)+1$

$=a\left(x-\dfrac{1}{2a}\right)^2+1-\dfrac{1}{4a}$

3. (1) 二次多項式函數 $y=x^2-3x+1$ 的圖形，向右平移 2 單位且向上平移 1 單位後，得到函數 $y=ax^2+bx+c$ 的圖形，試求 $a+b+c$ 之值。(5 分)

(2) 二次多項式函數 $y=a(x-h)^2+c$ 的圖形，向右平移 2 單位且向上平移 1 單位後，得到函數 $y=x^2$ 的圖形，試求數對 (h, c)。(5 分)

解 (1) $y=x^2-3x+1 \xrightarrow{\text{右移 2 單位}} y=(x-2)^2-3(x-2)+1=x^2-7x+11$

$\xrightarrow{\text{上移 1 單位}} y=x^2-7x+12$

故 $a+b+c=1+(-7)+12=6$

(2) 所以 $y=x^2$ 的圖形向左平移 2 單位且向下平移 1 單位為 $y=a(x-h)^2+c$

故 $(x+2)^2-1=a(x-h)^2+c$

比較可得 $h=-2$，$c=-1$

故數對 $(h, c)=(-2, -1)$

4. 已知 $y=f(x)$ 為二次函數，

(1) 若其圖形以 $(2, 3)$ 為頂點，且過點 $(3, 1)$，試求 $f(x)$。(5 分)

(2) 若其圖形與 x 軸交於 $(-1, 0)$，$(3, 0)$，且其頂點的 y 坐標為 4，試求 $f(x)$。(5 分)

解 (1) 因為頂點在 $(2, 3)$，可令 $f(x)=a(x-2)^2+3$

代入 $(3, 1)$ 得 $1=f(3)=a(3-2)^2+3$

化簡為 $a+3=1$，得 $a=-2$

故 $f(x)=-2(x-2)^2+3=-2x^2+8x-5$

(2) 因為圖形通過 $(-1, 0)$，$(3, 0)$

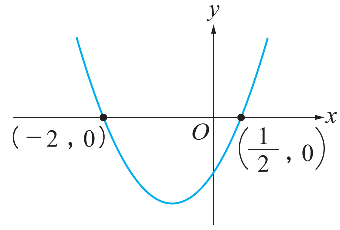
故 $f(-1)=0$，$f(3)=0$

可令
$$\begin{aligned} f(x)&=a(x+1)(x-3)\\ &=a(x^2-2x-3)\\ &=a((x-1)^2-4)\\ &=a(x-1)^2-4a \end{aligned}$$

故頂點的 y 坐標為 $-4a=4$，得 $a=-1$

故 $f(x)=-(x+1)(x-3)=-x^2+2x+3$

5. 若函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的圖形如右圖，則下列各數哪些為負數？（10 分）



(A) a　(B) b　(C) c
(D) b^2-4ac　(E) $a-b+c$

解 (A) ×：開口向上，故 $a>0$

(B) ×：$f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2-\dfrac{b^2-4ac}{4a}$，頂點的 x 坐標為 $-\dfrac{b}{2a}$

由圖知 $-\dfrac{b}{2a}<0$，故 $b>0$

(C) ○：$f(0)=c$，即圖形與 y 軸交點的 y 坐標為 c，由圖知 $c<0$

(D) ×：因圖形與 x 軸有兩相異交點，故判別式 $b^2-4ac>0$

(E) ○：$f(-1)=a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=a-b+c$

由圖知 $f(-1)<0$，即 $a-b+c<0$

故選(C)(E)

6. 設 $f(x)=x^2-2x-1$，

(1) 若 x 為實數，則 $f(x)$ 的最小值為何？（4 分）

(2) 若 $-2\leq x\leq 2$，則 $f(x)$ 的最大值與最小值為何？（4 分）

(3) 若 $2\leq x\leq 3$，則 $f(x)$ 的最大值與最小值為何？（4 分）

(4) 若 $-2\leq x\leq 0$，則 $f(x)$ 的最大值與最小值為何？（4 分）

解 (1) 對 $f(x)$ 配方：$f(x)=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$，故 $f(x)$ 的最小值為 -2

(2) 由圖(一)可知 $f(x)$ 在區間 $[-2，2]$ 的

最大值為 $f(-2)=(-2)^2-2\cdot(-2)-1=7$，最小值為 $f(1)=-2$

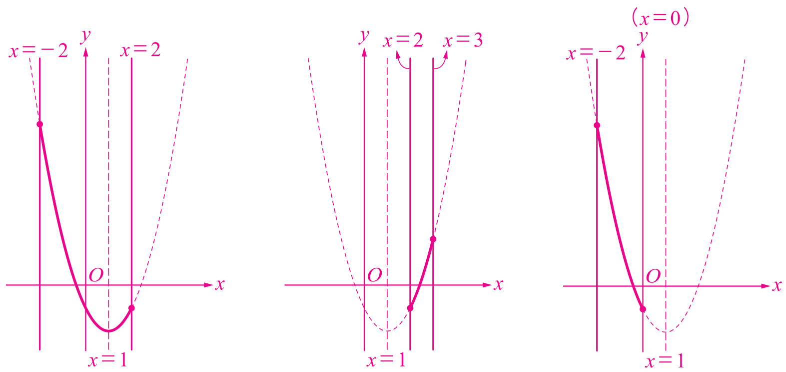
(3) 由圖(二)可知 $f(x)$ 在區間 $[2，3]$ 的

最大值為 $f(3)=3^2-2\cdot 3-1=2$，最小值為 $f(2)=2^2-2\cdot 2-1=-1$

(4) 由圖(三)可知 $f(x)$ 在區間 $[-2，0]$ 的

最大值為 $f(-2)=(-2)^2-2\cdot(-2)-1=7$

最小值為 $f(0)=0^2-2\cdot 0-1=-1$



7. 若二次函數 $f(x)=x^2-4x+(k-2)$ 恆正，試求 k 的範圍。（10 分）

解 因 $f(x)$ 的值恆正，故其判別式 $b^2-4ac<0$

因此 $(-4)^2-4\cdot 1\cdot(k-2)<0$

化簡得 $k>6$

進階題

8. 某餐廳的套餐成本為 120 元，如果定價 200 元，每週可賣 300 份。但若定價每增加 10 元，則每週少賣 50 份；若定價每減少 10 元，則每週多賣 50 份。因此若增加定價 $10x$ 元，則每週少賣 $50x$ 份，若利潤以 $f(x)$ 表示，試求：

(1) $f(x)$。（5 分）

(2) 定價為何值時有最大利潤。（5 分）

解 (1) 由題意知

$$f(x)=(200+10x-120)(300-50x)$$
$$=-500x^2-1000x+24000$$

(2) $f(x)=-500x^2-1000x+24000$

$$=-500(x+1)^2+24500$$

$\therefore f(x)$ 在 $x=-1$ 有最大值 24500

故定價為 190 元時有最大利潤

9. 設 a，b，c 都是非零的實數，且二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$ 頂點的 x 坐標落在 1 和 3 之間。試選出頂點的 x 坐標必定落在 4 和 5 之間的二次函數。（10 分）

(A) $f_1(x)=a(x-2)^2+b(x-2)+c$

(B) $f_2(x)=a(x+2)^2+b(x+2)+c$

(C) $f_3(x)=a(2x-7)^2+b(2x-7)+c$

(D) $f_4(x)=a\left(\dfrac{x+7}{2}\right)^2+b\left(\dfrac{x+7}{2}\right)+c$

(E) $f_5(x)=a(3x-11)^2+b(3x-11)+c$

解 設 $f(x)$ 頂點的 x 坐標為 h，且 $1<h<3$

(A) ×：令 $x-2=h \Rightarrow x=h+2$，則 $y=f_1(x)$ 頂點 x 坐標為 $h+2$

又 $1<h<3$，故 $3<h+2<5$

(B) ×：令 $x+2=h \Rightarrow x=h-2$，則 $y=f_2(x)$ 頂點 x 坐標為 $h-2$

又 $1<h<3$，故 $-1<h-2<1$

(C) ○：令 $2x-7=h \Rightarrow x=\dfrac{h+7}{2}$，則 $y=f_3(x)$ 頂點 x 坐標為 $\dfrac{h+7}{2}$

又 $1<h<3$，故 $4<\dfrac{h+7}{2}<5$

(D) ×：令 $\dfrac{x+7}{2}=h \Rightarrow x=2h-7$，則 $y=f_4(x)$ 頂點 x 坐標為 $2h-7$

又 $1<h<3$，故 $-5<2h-7<-1$

(E) ○：令 $3x-11=h \Rightarrow x=\dfrac{h+11}{3}$，則 $y=f_5(x)$ 頂點 x 坐標為 $\dfrac{h+11}{3}$

又 $1<h<3$，故 $4<\dfrac{h+11}{3}<\dfrac{14}{3}<5$

故選(C)(E)