

1-2 週期性數學模型

重點整理

一、週期性現象

周而復始的規律現象，稱為週期性現象。

例：一個星期有 7 天，分別是星期日、星期一、……、星期六，接著仍是星期日、星期一、……、星期六，呈現周而復始的規律。

例：操場有一座 400 公尺的跑道，小偉站在跑道旁邊，小倫沿著跑道慢跑。每當小倫經過小偉身邊時，兩人擊掌一次。顯然，小倫每跑 400 公尺就會與小偉擊掌一次。

二、正弦函數的圖形

1. 設 $f(x)$ 是一個函數，

(1) 週期函數：若存在一個常數 T ，使得每個 x 都滿足 $f(x+T)=f(x)$ ，則 $f(x)$ 稱為週期函數。

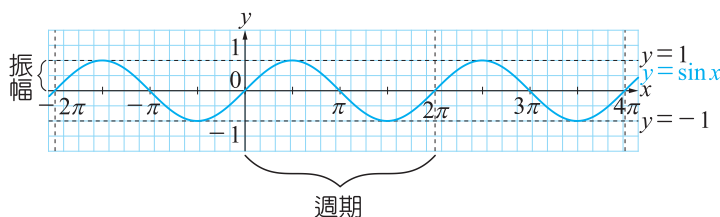
(2) 週期：滿足 $f(x+T)=f(x)$ 的最小正數 T 稱為函數 $f(x)$ 的週期。

(3) 振幅：正弦函數圖形在直線 $y = \pm 1$ 之間上下擺動，此兩直線距離之半稱為正弦函數的振幅。

(4) 定義域：對函數 $f(x)$ 而言， x 所有可能值的最大範圍，稱為此函數的定義域。

(5) 值域： $f(x)$ 所有可能函數值的最大範圍，稱為此函數的值域。

2. $y = \sin x$ 圖形如下：



(1) 定義域為所有實數。

(2) 值域為 $[-1, 1]$ 。

(3) 週期為 2π 。

(4) 振幅為 1。

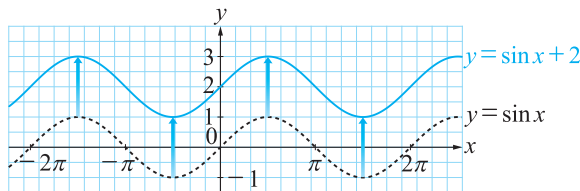
三、正弦函數圖形的平移與伸縮

1. $y = \sin x$ 圖形的平移：

設 $h, k > 0$ ，則：

(1) 函數 $y = \sin x + k$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形向上平移 k 個單位長。

例：函數 $y = \sin x + 2$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形向上平移 2 個單位長。

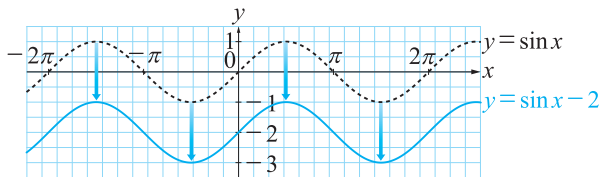


1-2



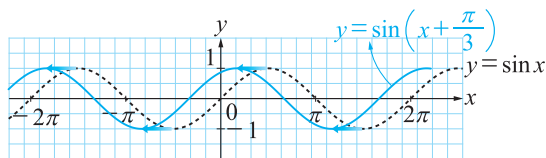
(2) 函數 $y = \sin x - k$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形向下平移 k 個單位長。

例：函數 $y = \sin x - 2$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形向下平移 2 個單位長。



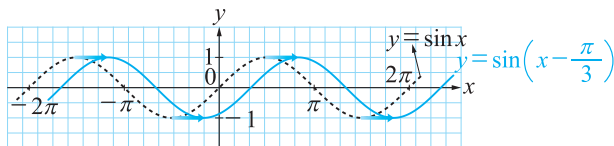
(3) 函數 $y = \sin(x + h)$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形向左平移 h 個單位長。

例：函數 $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 個單位長。



(4) 函數 $y = \sin(x - h)$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形向右平移 h 個單位長。

例：函數 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 的圖形向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 個單位長。

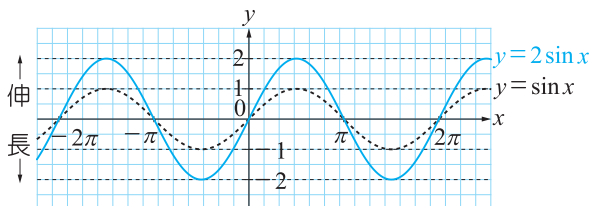


2. $y = \sin x$ 圖形的伸縮：

設 $a > 0$ ，則：

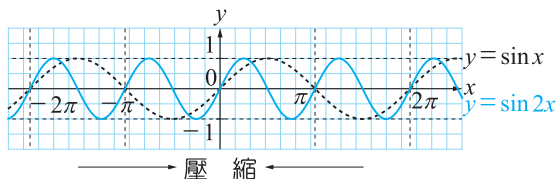
(1) 函數 $y = a \sin x$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 圖形上每一點的縱坐標都乘上 a 倍而得。

例：函數 $y = 2 \sin x$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 圖形上每一點的縱坐標都乘上 2 倍而得。



(2) 函數 $y = \sin ax$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 圖形上每一點的橫坐標都乘上 $\frac{1}{a}$ 倍而得。

例：函數 $y = \sin 2x$ 的圖形是將 $y = \sin x$ 圖形上每一點的橫坐標都乘上 $\frac{1}{2}$ 倍而得。



**例題 1 週期性現象(一)：相隔固定時間噴發的間歇泉**

某地有一座定時噴發的間歇泉，每隔 90 分鐘開始噴出泉水，歷時 3 分鐘結束，也就是說，噴出泉水 3 分鐘後休息，87 分鐘以後再噴出泉水。小輝於某日上午 8 點 30 分開始在此間歇泉旁邊觀察，9 點整看到開始噴出泉水，下午 4 點整離開。試求：

- (1) 小輝總共看到幾次噴發？(5 分)
- (2) 如果小輝希望看到 8 次完整的噴泉噴發，則他至少要待到幾點幾分才能離開？(5 分)

解 (1) 上午 9 點整至下午 4 點整共 7 小時

$$16 - 9 = 7(\text{小時}) = 420(\text{分鐘})$$

$$420 \div 90 = 4 \cdots 60$$

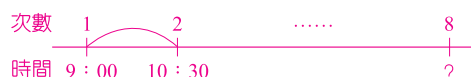
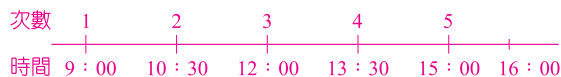
$$4 + 1 = 5$$

故總共看到 5 次噴發

- (2) $8 - 1 = 7$ ，第 8 次噴泉在上午 9 點整後經過 7 個 90 分鐘的間隔噴發

$$90 \times 7 = 630(\text{分鐘}) = 10 \text{ 小時 } 30 \text{ 分鐘}$$

$$\text{因此 } 9 \text{ 點整} + 10 \text{ 小時 } 30 \text{ 分鐘} + 3 \text{ 分鐘} = 19 \text{ 點 } 33 \text{ 分} = \text{下午 } 7 \text{ 點 } 33 \text{ 分}$$

**例題 2 週期性現象(二)**

某公司舉辦抽獎活動，2000 名員工分別領到編號 0001 至 2000 的對獎聯。首先，抽出一個不大於 80 的正整數，將此數字逐次加上 80，但不可大於 2000，這些號碼都可以獲得獎品。試問：

- (1) 假設抽出的正整數是 32，則中獎號碼當中最大的是幾號？(5 分)
- (2) 假設抽出的正整數是 75，則共有幾人中獎？(5 分)

解 (1) $2000 \div 80 = 25$

$$80 \times 24 = 1920$$

$$1920 + 32 = 1952 \quad \therefore \text{中獎號碼最大的是 } 1952 \text{ 號}$$

- (2) $\because 2000$ 可被 80 整除，每 80 人有 1 人中獎

$$\therefore 2000 \text{ 人恰有 } 25 \text{ 人中獎(即 } 75, 155, 235, \dots, 1995, \text{ 共 } 25 \text{ 人)}$$

例題 3 週期函數：推算 2^n 的個位數字

設 n 是正整數，即 $n = 1, 2, 3, \dots$ ，令 $f(n)$ 等於 2^n 的個位數字。

- (1) 試求 $f(1)$ ， $f(2)$ ， $f(3)$ ， $f(4)$ ， $f(5)$ 。(5 分)
- (2) 事實上， $f(n)$ 是一個週期函數，滿足 $f(n+T)=f(n)$ ，試求滿足此條件的最小正整數 T 值。(3 分)
- (3) 試求 $f(86)$ ，即 2^{86} 的個位數字。(2 分)

解 (1) $2^1 = 2 \Rightarrow f(1) = 2$

$$2^2 = 4 \Rightarrow f(2) = 4$$

$$2^3 = 8 \Rightarrow f(3) = 8$$

$$2^4 = 16 \Rightarrow f(4) = 6$$

$$2^5 = 32 \Rightarrow f(5) = 2$$

- (2) 由(1)知 $f(5)=f(1) \quad \therefore T=5-1=4$

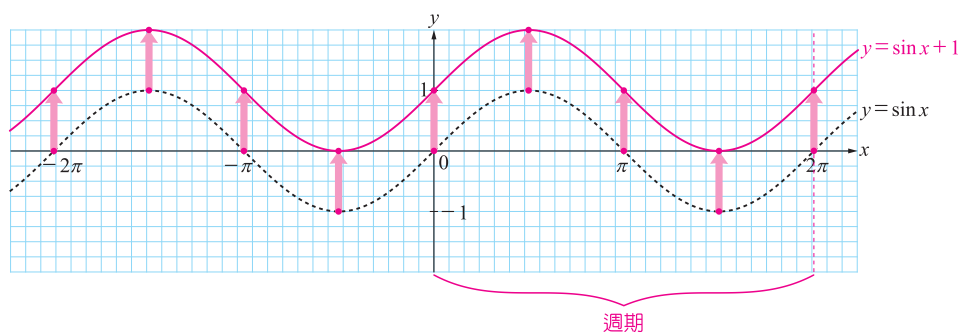
$$(3) f(86)=f(4 \times 21 + 2)=f(2)=4$$



● 例題 4 正弦函數圖形的平移(一)(上下平移)

- (1) 利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出函數 $y = \sin x + 1$ 的圖形。(6 分)
(2) 承(1)，求其週期。(4 分)

解 (1)



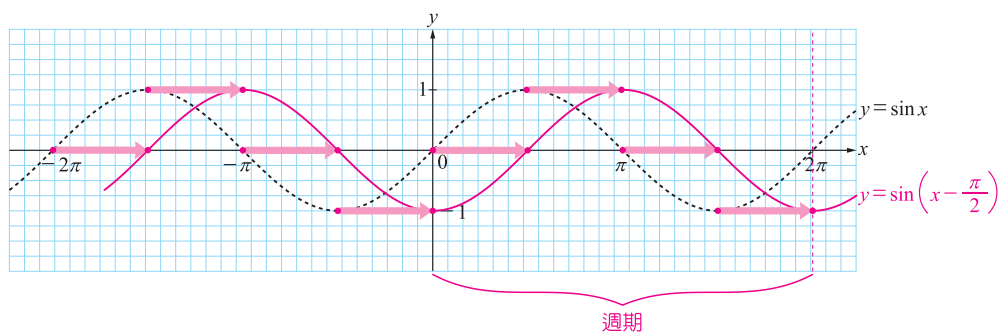
將 $y = \sin x$ 圖形上每一點都向上平移 1 單位長(即縱坐標加 1)
即可得到 $y = \sin x + 1$ 的圖形

- (2) 由(1)知週期為 2π

● 例題 5 正弦函數圖形的平移(二)(左右平移)

- (1) 利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出函數 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形。(6 分)
(2) 承(1)，求其週期。(4 分)

解 (1)



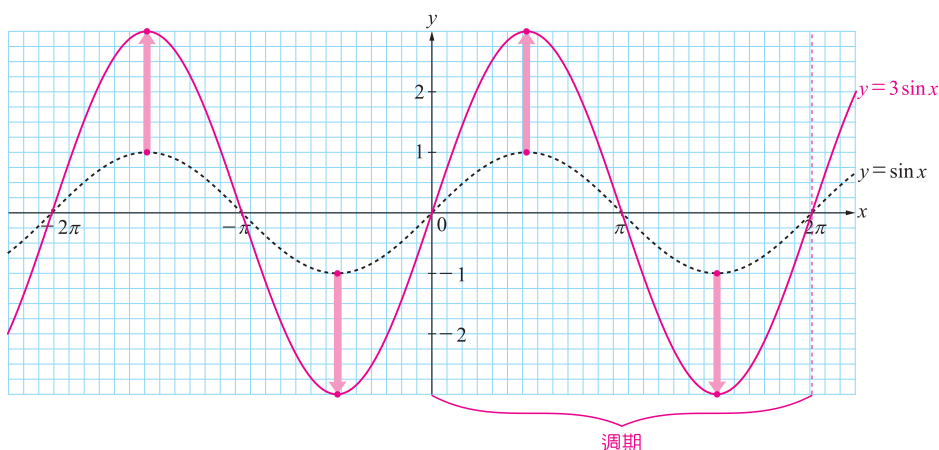
將 $y = \sin x$ 圖形上每一點都向右平移 $\frac{\pi}{2}$ 單位長(即橫坐標加 $\frac{\pi}{2}$)

即可得到 $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ 的圖形

- (2) 由(1)知週期為 2π

**例題 6 正弦函數圖形的伸縮(一)(上下伸縮)**

- (1) 利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出函數 $y = 3 \sin x$ 的圖形。(6 分)
(2) 承(1)，求其週期。(4 分)

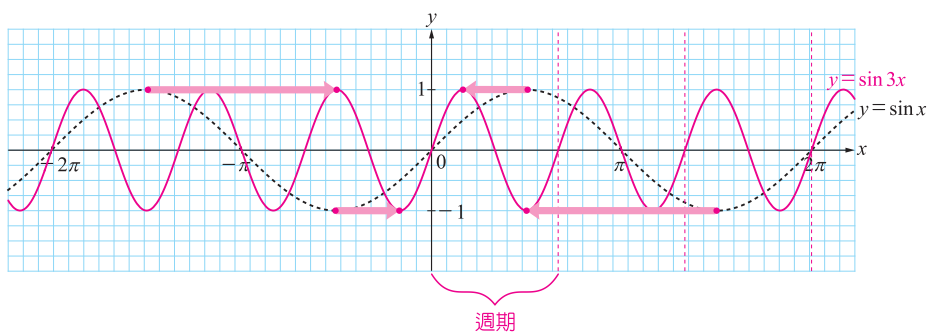
解 (1)

將 $y = \sin x$ 圖形上每一點的縱坐標都乘以 3
即可得到 $y = 3 \sin x$ 的圖形

- (2) 由(1)知週期為 2π

例題 7 正弦函數圖形的伸縮(二)(左右伸縮)

- (1) 利用 $y = \sin x$ 的圖形畫出函數 $y = \sin 3x$ 的圖形。(6 分)
(2) 承(1)，求其週期。(4 分)

解 (1)

將 $y = \sin x$ 圖形上每一點的橫坐標都乘以 $\frac{1}{3}$

即可得到 $y = \sin 3x$ 的圖形

- (2) 由(1)知週期為 $\frac{2\pi}{3}$

**例題 8 用正弦函數模擬週期性現象(聲波函數)**

在音樂領域裡依據十二平均律的原理，由 A4 往上 k 個半音的聲波函數為

$f(x) = \sin(880\pi \times 2^{\frac{k}{12}}x)$ ， x 的單位為秒。已知 B4 是 A4 往上 2 個半音，試求：

- (1) B4 這個音的聲波函數。(5 分)
- (2) B4 這個音的頻率。(已知 $2^{\frac{1}{6}} \approx 1.12$)(5 分)

解 (1) 由題意知，B4 的聲波函數為

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin(880\pi \times 2^{\frac{2}{12}}x) \\ &= \sin(880\pi \times 2^{\frac{1}{6}}x) \end{aligned}$$

$$(2) \text{ 由正弦函數圖形的伸縮可知週期為 } \frac{2\pi}{880\pi \times 2^{\frac{1}{6}}} = \frac{1}{440 \times 2^{\frac{1}{6}}}$$

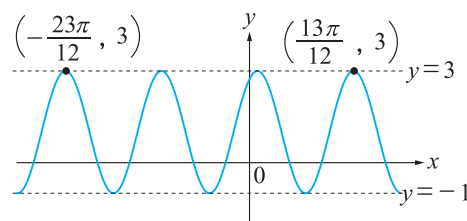
頻率為週期的倒數，故頻率為

$$440 \times 2^{\frac{1}{6}} \approx 440 \times 1.12 = 492.8 \text{ (赫茲)}$$

例題 9 週期函數的週期與振幅

右圖為某週期函數的圖形，試依據圖上的數據求此函數的：

- (1) 週期。(5 分)
- (2) 振幅。(5 分)



解 (1) 設週期為 T

觀察圖形發現從 $-\frac{23\pi}{12}$ 至 $\frac{13\pi}{12}$ 共經歷 3 個週期

$$\text{得 } 3T = \frac{13\pi}{12} - \left(-\frac{23\pi}{12}\right) = 3\pi$$

故週期 $T = \pi$

$$(2) \text{ 振幅為 } \frac{1}{2}(3 - (-1)) = 2$$

例題 10 正弦函數的定義域、值域、週期、振幅

定義函數 $f(x) = 2 + 3 \sin 4x$ ，試求 $f(x)$ 的：

- (1) 定義域。(2 分)
- (2) 值域。(2 分)
- (3) 週期。(3 分)
- (4) 振幅。(3 分)

解 (1) $\because f(x)$ 對所有實數都有意義 $\therefore$ 它的定義域為所有實數所成的集合 $\mathbb{R}$

$$(2) \because -1 \leq \sin 4x \leq 1 \quad \therefore -3 \leq 3 \sin 4x \leq 3$$

故得 $-1 \leq 2 + 3 \sin 4x \leq 5$ ，值域為 $[-1, 5]$

$$(3) \text{ 週期為 } \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$(4) \text{ 振幅為 } \frac{1}{2}(5 - (-1)) = 3$$