第 1 章　綜合演練

月　日

得分

一、單選題（每題 5 分，共 10 分）

1. 標準位置角 $\dfrac{7\pi}{4}$ 弳位於何處？

(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限
(D)第四象限　(E) x 軸上

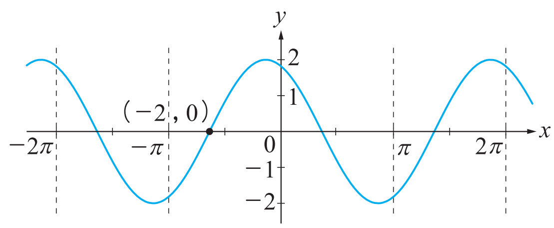
解 $\dfrac{7\pi}{4}$ 弳 $=\dfrac{7\pi}{4}\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^{\circ}=315^{\circ}$

$\because\ 270^{\circ}<315^{\circ}<360^{\circ}$，得知此角位於第四象限

故選(D)

2. 右圖是哪一個函數的圖形？

(A) $y=\sin x+2$　(B) $y=2\sin x$
(C) $y=2\sin(x+2)$　(D) $y=2\sin(x-2)$
(E) $y=2\sin(x+2)+2$



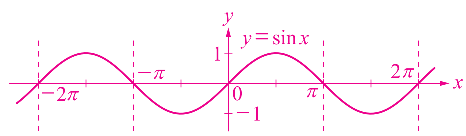
解 將此圖形與 $y=\sin x$ 圖形比較

(1) 振幅為 2，故知沿垂直方向伸長為 2 倍

(2) 週期仍為 2π，故知沒有沿水平方向伸縮

(3) 圖形的對稱中心向左平移 2 單位長

綜合上述，此函數為 $y=2\sin(x+2)$，故選(C)



二、多選題（每題 5 分，所有選項均答對者得 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，其餘不給分，共 10 分）

3. 假設函數 $f(x)=2\sin 3x$，請選出正確的選項。

(A) $f(x)$的值域為 $[-3,3]$　(B) $f(x)$的振幅為 2　(C) $f(x)$的週期為 2π
(D) $f(1+2\pi)=f(1)$　(E) $y=f(x)$的圖形可以由 $y=\sin x$ 的圖形伸縮而得

解 (A) ×：值域為 $[-2,2]$；(B) ○：振幅為 2；(C) ×：週期為 $\dfrac{2\pi}{3}$

(D) ○：$\because$週期為 $\dfrac{2\pi}{3}$　$\therefore f(1+2\pi)=f\left(1+3\cdot\dfrac{2\pi}{3}\right)=f(1)$

(E) ○：$y=\sin x$ 圖形上每一點的橫坐標乘以 $\dfrac{1}{3}$ 倍，縱坐標乘以 2 倍

可以得到 $y=2\sin 3x$ 的圖形

故選(B)(D)(E)

4. 下列哪些選項的函數週期為 2π？

(A) $y=\sin x$　(B) $y=\sin x+1$　(C) $y=2\sin x$

(D) $y=\sin 2x$　(E) $y=\sin(x+1)$

解 (A) ○：週期為 2π

(B) ○：週期為 2π

(C) ○：週期為 2π

(D) ×：週期為 π

(E) ○：週期為 2π

故選(A)(B)(C)(E)

三、填充題（每格 5 分，共 60 分）

5. 已知標準位置角 θ 滿足 $\dfrac{55\pi}{12}<\theta<\dfrac{59\pi}{12}$，則 θ 角位於第________象限。

解 取最小正同界角 θ'

得 $\dfrac{7\pi}{12}<\theta'<\dfrac{11\pi}{12}$，$\theta'$ 在第二象限

即 θ 位於第二象限

6. 已知扇形的圓心角為 30°，面積為 3π 平方公分，則此扇形的半徑為________公分，周長為________公分。

解

假設扇形半徑為 r 公分，由已知得圓心角為 $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ 弳

(1) $\because$ 面積為 $\dfrac{1}{2}\times r^2\times\dfrac{\pi}{6}=3\pi$

$\therefore r^2=36\Rightarrow r=6$

(2) 扇形周長為弧長＋半徑 × 2

即 $r\theta+2r=6\times\dfrac{\pi}{6}+2\times 6=12+\pi$

故得半徑為 6 公分，周長為 $12+\pi$ 公分

7. 某時鐘分針長 15 公分，試求從 3 點 5 分到 3 點 53 分這 48 分鐘之間：

(1) 分針的尖端走了________公分。

(2) 分針掃過的面積為________平方公分。

解 分針在 48 分鐘間，走過的弧對應的圓心角為

$2\pi \times \dfrac{48}{60}=\dfrac{8\pi}{5}$（弳）

(1) 尖端走了弧長 $s=15\times\dfrac{8\pi}{5}$

$=24\pi$（公分）

(2) 面積 $A=\dfrac{1}{2}\times 15^2\times\dfrac{8\pi}{5}$

$=180\pi$（平方公分）

8. 鋼琴鍵盤上某個音的聲波函數為 $f(x)=\sin(1760\pi x)$，x 的單位為秒，則：

(1) 此函數的週期為________秒／次。

(2) 此函數的頻率為________赫茲。

解 (1) 由正弦函數圖形的伸縮

可知週期為 $\dfrac{2\pi}{1760\pi}=\dfrac{1}{880}$（秒／次）

(2) 頻率為週期的倒數，故頻率為 880（赫茲）

9. 古人使用干支紀年（月、日、時），由來已久。所謂「干支」，就是天干與地支，詳如下表。從天干的「甲」與地支的「子」開始，依序各取一個，組成一對干支，如甲子、乙丑、……等，取完就從頭再取，例如：癸酉之後是甲戌、乙亥、丙子、丁丑、……等。依照這個規則，組成甲子、乙丑、……、壬戌、癸亥等 60 對干支，周而復始，輪流出現，稱為「一甲子」。

天干	甲	乙	丙	丁	戊	己	庚	辛	壬	癸	（甲）	（乙）
地支	子	丑	寅	卯	辰	巳	午	未	申	酉	戌	亥

已知 2022 年為壬寅年，試問：

(1) 下一個壬寅年為西元________年。

(2) 西元 2064 年的干支紀年為________年。

解 (1) 已知干支有 60 對，故下次出現壬寅年必為 60 年之後，即為西元 $2022+60=2082$ 年

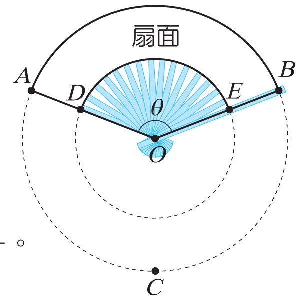
(2) $2064-2022=42$，分別計算天干與地支

天干每 10 個為一週期　$\because 42\div 10=4\cdots\cdots 2$　$\therefore$由壬開始向後推算第 2 個天干得甲

地支每 12 個為一週期　$\because 42\div 12=3\cdots\cdots 6$　$\therefore$由寅開始向後推算第 6 個地支得申

故 2064 年是「甲申」年

10. 古人認為，將物體分割為大、小兩部分，當較小部分與較大部分的比例等於較大部分與整體的比例時，這種比例是最美的，稱為「黃金比例」，並稱這種分割為「黃金分割」，我們可以在《幾何原本》看到相關的記載。將這個想法應用在如右圖的扇面設計，就是 $\dfrac{\text{較短弧長}}{\text{較長弧長}}=\dfrac{\text{較長弧長}}{\text{圓周長}}$，也就是 $\dfrac{\overset{\frown}{AB}\text{弧長}}{\overset{\frown}{BCA}\text{弧長}}=\dfrac{\overset{\frown}{BCA}\text{弧長}}{\text{圓周長}}$。小雯有一支扇子，如右圖長 $\overline{OA}=30$ 公分，$\overline{BE}=12$ 公分。若此扇子滿足上述條件，則扇面完整打開時，

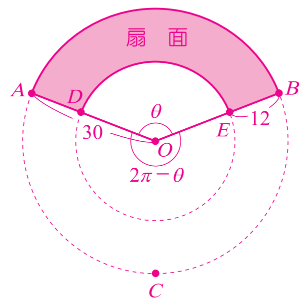


(1) 圓心角 θ 為________弳。

(2) $\overset{\frown}{AB}$ 弧長為________公分。

(3) 扇面的面積為________平方公分。

解 (1) 設滿足條件的圓心角為 θ（弳），則



$$\frac{30\theta}{30(2\pi-\theta)}=\frac{30(2\pi-\theta)}{30\cdot 2\pi}$$

兩邊約分，$\dfrac{\theta}{2\pi-\theta}=\dfrac{2\pi-\theta}{2\pi}$

整理可得 $(2\pi-\theta)^2=2\pi\theta$

$\Rightarrow \theta^2-4\pi\theta+4\pi^2=2\pi\theta$

$\Rightarrow \theta^2-6\pi\theta+4\pi^2=0$

則 $\theta=\dfrac{6\pi\pm\sqrt{36\pi^2-16\pi^2}}{2}$

$=\dfrac{6\pi\pm\sqrt{20\pi^2}}{2}$

$=\dfrac{6\pi\pm2\sqrt{5}\pi}{2}$

$=(3\pm\sqrt{5})\pi$

$\because \theta<2\pi$ $\quad\therefore$ 取 $\theta=(3-\sqrt{5})\pi$（弳）

(2) $\overset{\frown}{AB}=30(3-\sqrt{5})\pi$

$=(90-30\sqrt{5})\pi\,(\approx 72)$（公分）

(3) $\overline{OD}=30-12=18$

扇面的面積為扇形 AOB 面積 − 扇形 DOE 面積，即

$\dfrac{1}{2}\cdot30^2\cdot(3-\sqrt{5})\pi-\dfrac{1}{2}\cdot18^2\cdot(3-\sqrt{5})\pi$

$=288(3-\sqrt{5})\pi\,(\approx 691.2)$（平方公分）

四、計算題（每題 10 分，共 20 分）

11. 已知扇形的面積為 1，弧長為 2，試求此扇形的：

(1) 圓心角（以弳表示）。（5 分）

(2) 半徑。（5 分）

解 設扇形半徑為 r，圓心角為 θ 弳

由已知，弧長為 $s=r\theta=2$ ……………①

面積為 $A=\dfrac{1}{2}r^2\theta=1$

即 $r^2\theta=2$ ……………………………②

$\dfrac{②}{①}$，得 $r=1$ 代入①

得 $\theta=2$

故圓心角為 2 弳，半徑為 1

12. 在一個遙遠的國度裡，經過專家研究以後，頒布兩種曆法同時施行。甲曆以 20 天為一個月，13 個月為一年，一年有 260 天。乙曆以 20 天為一個月，18 個月為一年，年底再加 5 天，一年有 365 天。假設這兩種曆法都以數字為月份名稱，如 1 月、2 月、……、10 月、11 月、……等，以西元 2023 年 1 月 1 日為甲曆、乙曆紀元 1 年 1 月 1 日。試問：

(1) 西元 2025 年 5 月 27 日相當於甲曆何年何月何日？（5 分）

(2) 已知某人出生於甲曆 3 年 2 月 1 日，當天是乙曆何年何月何日？（5 分）

解 (1) 計算從 2023 年 1 月 1 日（含當天）到 2025 年 5 月 27 日的天數

$365+366+31+28+31+30+27=878$ （2024 年是閏年，有 366 天）

$878\div260=3\cdots\cdots98$

$98\div20=4\cdots\cdots18$

$878=260\times3+20\times4+18$

也就是第 4 年第 5 個月第 18 日

故得甲曆 4 年 5 月 18 日

(2) 計算從甲曆 1 年 1 月 1 日（含當天）到 3 年 2 月 1 日的天數

$260\times2+20\times1+1=541$，換算為乙曆

$541\div365=1\cdots\cdots176$

$176\div20=8\cdots\cdots16$

$541=365\times1+20\times8+16$

也就是第 2 年第 9 個月第 16 日

故得乙曆 2 年 9 月 16 日