第 2 章 按比例成長模型

2–1 指數函數及其圖形

重點整理

一、指數函數的定義

設 $a>0$，且 $a\neq 1$，x 是任意實數，則函數 $f(x)=a^x$ 稱為「以 a 為底數的指數函數」，其中定義域為所有實數，值域為所有正實數。

例：$f(x)=2^x$ 是以 2 為底數的指數函數。

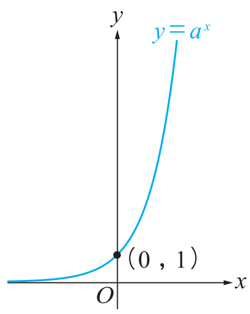
例：$f(x)=5^x$ 是以 5 為底數的指數函數。

二、指數函數的圖形與特徵

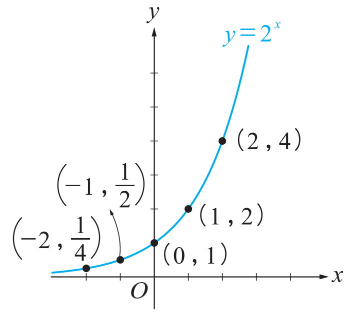
在坐標平面上，以 (x, a^x) 為點坐標，可以描繪出指數函數 $f(x)=a^x$ 的圖形。

1. 指數函數 $f(x)=a^x\ (a>1)$ 的圖形特徵：

圖形永遠在 x 軸上方，且通過點 $(0, 1)$，由左而右逐漸上升，愈往右邊上升幅度愈來愈大，當 x 值愈小，圖形愈接近 x 軸，且圖形凹口向上，如圖(一)。



圖(一)

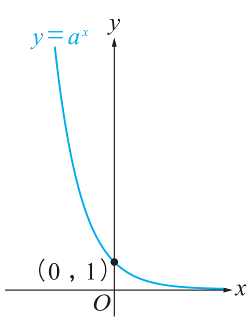


圖(二)

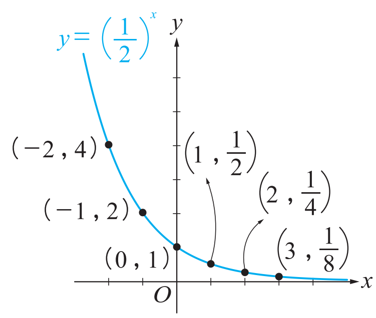
例：$y=f(x)=2^x$ 圖形由左而右逐漸上升，如圖(二)。

2. 指數函數 $f(x)=a^x\ (0<a<1)$ 的圖形與特徵：

圖形永遠在 x 軸上方，且通過點 $(0, 1)$，由左而右逐漸下降，愈往右邊下降幅度愈來愈小，當 x 值愈大，圖形愈接近 x 軸，且圖形凹口向上，如圖(三)。



圖(三)



圖(四)

例：$y=f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ 圖形由左而右逐漸下降，如圖(四)。

3. 指數方程式與指數不等式：

由指數函數的圖形特性，可以解指數方程式或指數不等式，詳見後面例題。

三、指數的應用

▨ 單利與複利：

設本金為 a，每期利率為 r，期數為 n。

(1) 單利（本金固定）：

經過 n 期後，本利和為 $a(1+nr)$。

例：若本金 $a=10000$（元），年利率 $r=1\%$，每年計息一次，則 3 年後（$n=3$），單利計算的本利和為 $10000(1+3\%)=10300$（元）。

(2) 複利（利息滾入本金）：

經過 n 期後，本利和為 $a(1+r)^n$。

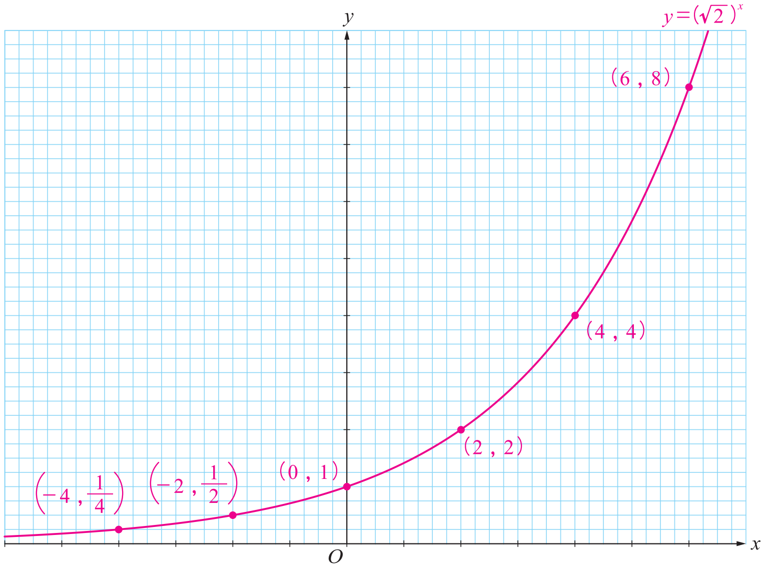
例：若本金 $a=10000$（元），年利率 $r=1\%$，每年計息一次，則 3 年後（$n=3$），複利計算的本利和為 $10000(1+1\%)^3\approx10303$（元）。

例題 1　指數函數的圖形

已知 $f(x)=(\sqrt{2})^x$，試完成下表，並利用此表描繪 $y=(\sqrt{2})^x$ 的圖形。（10 分）

x	-4	-2	0	2	4	6
$f(x)$						

解



x	-4	-2	0	2	4	6
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

例題 2　按比例成長㈠：水生植物的成長

已知水生植物 A 每經過 3 個月，覆蓋水面的面積會增加為原來的 2 倍；水生植物 B 每經過 2 個月，覆蓋水面的面積會增加為原來的 3 倍。試回答下列問題：

⑴ 在甲池塘投入 A 植物 200 平方公尺，12 個月以後面積是多少平方公尺？（5 分）

⑵ 在乙池塘投入 B 植物 300 平方公尺，12 個月以後面積是多少平方公尺？（5 分）

解 ⑴ 12 個月以後 A 植物面積為

$200\times 2^{\frac{12}{3}}=200\times 2^{4}=3200$（平方公尺）

⑵ 12 個月以後 B 植物面積為

$300\times 3^{\frac{12}{2}}=300\times 3^{6}=218700$（平方公尺）

2-1

例題 3　按比例成長㈡：細菌繁殖

在密閉容器裡有某種細菌 2000 隻，以每小時增加 6 % 的速率開始繁殖。如果繁殖速率不變，則 100 個小時後細菌的數量為多少隻？（已知 $1.06^{100}\approx 339$）（10 分）

解 100 個小時後，細菌數量為

$2000\times(1+6\,\%)^{100}=2000\times 1.06^{100}\approx 2000\times 339=678000$

故 100 個小時後細菌的數量為 678000 隻

例題 4 按比例衰退㈠：放射性物質的半衰期

放射性物質的質量變為原來的一半所需的時間，稱為該放射物的半衰期。銫 137（Cs-137）是一種放射性物質，半衰期為 30 年。假設剛開始銫 137 的質量為 100 公克，試求：

⑴ 120 年後的質量。（5 分）

⑵ 承⑴，再經過多少年以後，其質量衰變到剩下 3.125 公克？（5 分）

解

⑴ $\because$ 半衰期是 30 年，故 120 年是半衰期的 $\dfrac{120}{30}=4$（倍）

因此，120 年以後，銫 137 的質量為 $100\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=100\times\dfrac{1}{16}=\dfrac{25}{4}=6.25$

即 120 年後其質量剩下 6.25 公克

⑵ $\because$ $6.25\times\dfrac{1}{2}=3.125$

故知再經過一個半衰期，也就是 30 年以後，其質量剩下 3.125 公克

例題 5 按比例衰退㈡：放射性物質的衰退

實驗室裡儲存某種放射性元素 400 克，其質量 m（克）與時間 x（年）的關係式為 $m=f(x)=ka^x$，其中 k，a 為常數。已知此關係式的圖形通過（0，400），（2，300），試求：

⑴ 關係式 $f(x)=ka^x$ 的 a 值。（5 分）

⑵ 8 年後還有多少克？（四捨五入至整數位）（5 分）

解 ⑴ 由題意得 $f(0)=ka^0=400$，$f(2)=ka^2=300$

兩式相除 $a^2=\dfrac{3}{4}$，得 $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$（≈ 0.8660）

⑵ 由 $f(0)=ka^0=400$ 得 $k=400$

所求為 $f(8)=400\times\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^8=\dfrac{2025}{16}=126.5625\approx 127$（克）

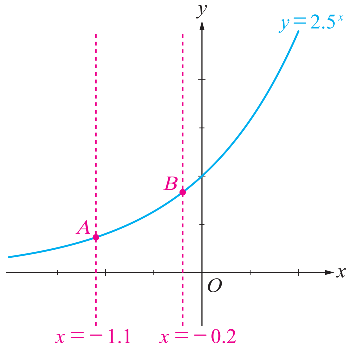
2-1

例題 6　利用指數函數圖形比較指數的大小

(1) 利用指數函數 $y=2.5^x$ 的圖形，比較 $2.5^{-1.1}$，$2.5^{-0.2}$ 兩數的大小關係。（5 分）

(2) 利用指數函數 $y=0.3^x$ 的圖形，比較 $0.3^{2.5}$，$0.3^{3.7}$ 兩數的大小關係。（5 分）

解 (1)



在圖形的 x 軸標記 $x=-1.1$ 與 -0.2 的點

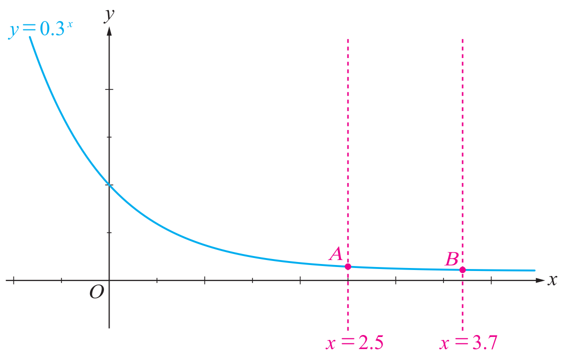
在此兩點分別作 y 軸的平行線

交圖形於 A、B 兩點

$\because$ 底數 $2.5>1$，圖形由左而右逐漸上升

$\therefore 2.5^{-1.1}<2.5^{-0.2}$

(2)



在圖形的 x 軸標記 $x=2.5$ 與 3.7 的點

在此兩點分別作 y 軸的平行線

交圖形於 A、B 兩點

$\because$ 底數 $0.3<1$，圖形由左而右逐漸下降

$\therefore 0.3^{2.5}>0.3^{3.7}$

例題 7　指數方程式

試解下列方程式：

(1) $2^{3x-2}=16$。（5 分）

(2) $3^{4x-3}=27$。（5 分）

解 (1) $2^{3x-2}=16$，即 $2^{3x-2}=2^4$

因為底數皆為 2，因此指數相等

所以 $3x-2=4$

故得 $x=2$

(2) $3^{4x-3}=27$，即 $3^{4x-3}=3^3$

因為底數皆為 3，因此指數相等

所以 $4x-3=3$

故得 $x=\dfrac{3}{2}$

例題 8　指數不等式（利用指數函數圖形的特徵）

試利用指數函數圖形的特徵解下列不等式：

(1) $16^{3x-1}>32^{2x+3}$。（5 分）

(2) $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{x+1}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x+4}$。（5 分）

解 (1) $\because\ 16^{3x-1}=(2^4)^{3x-1}=2^{12x-4}$，$32^{2x+3}=(2^5)^{2x+3}=2^{10x+15}$

$\therefore$原不等式可改寫為 $2^{12x-4}>2^{10x+15}$

$\because$底數大於 1，由指數函數圖形的特徵

可知 $12x-4>10x+15$，解得 $x>\dfrac{19}{2}$

(2) $\because\ \left(\dfrac{1}{9}\right)^{x+1}=\left(\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\right)^{x+1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+2}$

$\therefore$原不等式可改寫為 $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{2x+2}>\left(\dfrac{1}{3}\right)^{3x+4}$

$\because$底數小於 1，由指數函數圖形的特徵

可知 $2x+2<3x+4$，解得 $x>-2$

例題 9　單利與複利

工作幾年之後，小輝打算把人生第一桶金 100 萬元存入銀行，試分別計算 3 年後的本利和：（四捨五入至整數位）

⑴ 以單利計算，每年計息一次，年利率為 1.5 %。（5 分）

⑵ 以複利計算，每年計息一次，年利率為 1.2 %。（已知 $1.012^3 \approx 1.04$）（5 分）

解 ⑴ 本利和為 $1000000 \times (1 + 0.015 \times 3) = 1045000$（元）

故以單利計算 3 年後的本利和為 1045000 元

⑵ 本利和為 $1000000 \times (1 + 0.012)^3 \approx 1000000 \times 1.04 = 1040000$（元）

故以複利計算 3 年後的本利和約為 1040000 元

例題 10　複利計算的本利和

一樣本金兩樣情！小雯與媽媽聊天時，發現同樣是人生的第一筆定存─20 萬元存 3 年，結果卻大不相同，請分別幫她們計算本利和：

期數＼利率	1.5 %	3 %	6 %
3	1.046	1.093	1.191
6	1.093	1.194	1.419
9	1.143	1.305	1.689
12	1.196	1.426	2.012

⑴ 小雯辛苦工作後存 20 萬元，年利率為 1.5 %，每年複利計息一次。（5 分）

⑵ 媽媽年輕時存 20 萬元，年利率為 6 %，每半年複利計息一次。（5 分）

說明：半年計息一次，視為一年有 2 期，將年利率除以 2 可得一期利率。

同理，3 個月計息一次，視為一年有 4 期，將年利率除以 4 可得一期利率。

例如當利率為 3 %，期數為 9 期時，$(1 + 3\%)^9 \approx 1.305$。

解 ⑴ 年利率 1.5 %，每年複利計息，3 年共 3 期

故本利和為 $200000 \times (1 + 1.5\%)^3 \approx 200000 \times 1.046 = 209200$（元）

小雯現在定存的本利和為 209200 元

⑵ 年利率 6 %，半年複利計息一次

就是以利率 3 % 複利計息，3 年共 6 期

故本利和為 $200000 \times (1 + 3\%)^6 \approx 200000 \times 1.194 = 238800$（元）

媽媽年輕時定存的本利和為 238800 元