第3章 綜合演練

月　日

得分

一、單選題（每題 5 分，共 10 分）

1. 平面上有 $A(2,5)$，$B(3,2)$，$C(x,1)$，$D(5,3)$ 四點，若向量 $\overrightarrow{AC}$ 與向量 $\overrightarrow{BD}$ 垂直，則 x 值為下列哪一個選項？

(A) 0　(B) 2　(C) 4　(D) 6　(E) 8

解 $\overrightarrow{AC}=(x-2,-4)$，$\overrightarrow{BD}=(2,1)$

$\because \overrightarrow{AC}\perp\overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0 \Rightarrow (x-2,-4)\cdot(2,1)=2(x-2)-4=0 \Rightarrow x=4$

故選(C)

2. 某工廠生產五種不同長寬比的螢幕，長：寬的比例分別為 4：3、5：4、16：9、16：10、21：9，試問哪一種規格的長寬比最接近黃金比例？

(A) 4：3　(B) 5：4　(C) 16：9　(D) 16：10　(E) 21：9

解 分別求這五種長寬比的比值，可得

(A) $\dfrac{4}{3}\approx 1.3333$

(B) $\dfrac{5}{4}=1.25$

(C) $\dfrac{16}{9}\approx 1.7778$

(D) $\dfrac{16}{10}=1.6$

(E) $\dfrac{21}{9}\approx 2.3333$

$\because$ 黃金比例的值大約是 1.6180……，故選(D)

二、多選題（每題 5 分，所有選項均答對者得 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，其餘不給分，共 10 分）

3. 已知直線 $L：6x-4y+7=0$，則下列哪些向量可為直線 L 的法向量？

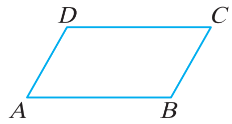
(A) $(6,-4)$　(B) $(3,-2)$　(C) $(-4,7)$　(D) $(4,-7)$　(E) $(6,7)$

解 由直線 L 方程式的 x，y 項係數構成的向量 $(6,-4)$ 可以是直線 L 的一個法向量

觀察各選項，與 $(6,-4)$ 平行的向量都可以為直線 L 的法向量

故選(A)(B)

4. 請就平行四邊形 $ABCD$ 中各向量間的關係，選出正確的選項。



(A) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$　(B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\vec{0}$

(C) $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$　(D) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$

(E) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BD}$

解 (A) ×：$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

(B) ○：$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

(C) ○：$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$

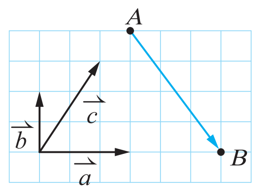
(D) ×：$\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=2\overrightarrow{BC}=2\overrightarrow{AD}$

(E) ○：$\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$

故選(B)(C)(E)

三、填充題（每題 10 分，共 60 分）

5. 右圖由 40 個邊長為 1 的正方形組成，試問：



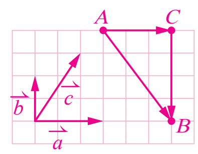
(1) 若 $\overrightarrow{AB}=r\vec{a}+s\vec{b}$，則數對$(r,s)=$________。（5 分）

(2) $\vec{a}\cdot\vec{c}=$________。（5 分）

解 (1) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\vec{a}+(-2\vec{b})$

$\therefore$數對$(r,s)=(1,-2)$

(2) 令 $\vec{a}$ 與 $\vec{c}$ 兩向量的夾角為 θ，且 $|\vec{c}|=\sqrt{3^2+2^2}=\sqrt{13}$



由右圖可知，$\cos\theta=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$

故 $\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta=3\times\sqrt{13}\times\dfrac{2}{\sqrt{13}}=6$

〈另解〉

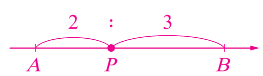
$\because$ $\vec{c}$ 在 $\vec{a}$ 上的正射影長為 2

$\therefore$ $\vec{a}\cdot\vec{c}=|\vec{a}||\vec{c}|\cos\theta=3\times2=6$

6. (1) 已知平面上有 $A(-2,1)$，$B(3,11)$兩點，P 為 $\overline{AB}$ 上一點，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$，則 P 點坐標為________。（5 分）

(2) 已知向量 $\vec{a}=(-2,3)$，$\vec{b}=(3,1)$，$\vec{v}=(5,9)$，若 $\vec{v}=r\vec{a}+s\vec{b}$，則數對$(r,s)=$________。（5 分）

解 (1) 作示意圖如右



由分點公式可得 P 點坐標為

$$\left(\frac{3\times(-2)+2\times3}{2+3},\frac{3\times1+2\times11}{2+3}\right)=(0,5)$$

(2) $\because$ $\vec{v}=r\vec{a}+s\vec{b}$

$\therefore(5,9)=r(-2,3)+s(3,1)=(-2r+3s,3r+s)$

解聯立 $\begin{cases}-2r+3s=5 \cdots\cdots① \\ 3r+s=9 \cdots\cdots②\end{cases}$

由② × 3 − ①得 $11r=22\Rightarrow r=2$，代回②得 $s=9-6=3$

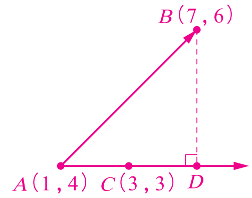
故數對$(r,s)=(2,3)$

7. 已知坐標平面上三點 $A(1,4)$，$B(7,6)$，$C(3,3)$，試回答下列問題：

⑴ B 點在直線 AC 上投影點 D 的坐標為________。（5 分）

⑵ B 點到直線 AC 的距離為________。（5 分）

解 作示意圖如右，$\overrightarrow{AB}=(6,2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,-1)$



$\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的投影點為 D 點

且 $\overrightarrow{AD}=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\overrightarrow{AC}$

$=\dfrac{6\times2+2\times(-1)}{2^2+(-1)^2}(2,-1)$

$=2(2,-1)=(4,-2)$

⑴ 設原點 $O(0,0)$，則 $\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AD}=(1,4)+(4,-2)=(5,2)$

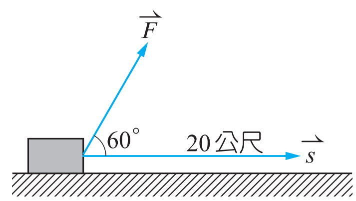
故投影點 D 的坐標為 $(5,2)$

⑵ B 點到直線 AC 的距離為 $|\overrightarrow{BD}|$

$\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}=(5,2)-(7,6)=(-2,-4)$

則 $|\overrightarrow{BD}|=\sqrt{(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

8. 如右圖，對物體施力 $\vec{F}$，其方向與物體移動方向夾角為 60°，且使物體產生位移 20 公尺。已知施力 $\vec{F}$ 對物體所作的功為 120 焦耳，試求：



⑴ 施力大小 $|\vec{F}|$ 為________牛頓。（5 分）

⑵ 承⑴，若施力大小不變，但與物體移動方向的夾角改為 30°，且使物體產生位移 20 公尺，則作功________焦耳。（說明：用 1 牛頓的力使物體產生 1 公尺位移，所作的功為 1 焦耳）（5 分）

解 ⑴ 施力大小為 $|\vec{F}|$，由功的定義與已知條件可得

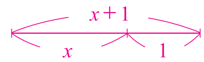
$|\vec{F}|\cos60^\circ\times20=120$，得 $|\vec{F}|=12$（牛頓）

⑵ 所作的功為

$|\vec{F}|\cos30^\circ\times20=12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}\times20=120\sqrt{3}$（焦耳）

9. 古希臘數學家歐幾里得在他的曠世巨作《幾何原本》中提出一個問題：將一個線段分割為長、短兩段，如果「長段長：短段長 = 全長：長段長」，這種分割稱為「黃金分割」，而這個比值就稱為「黃金比例」。假設現在短段長與長段長的比為 $1:x$，試問黃金比例的值為________。

解 由題意，$\dfrac{x}{1}=\dfrac{x+1}{x}\Rightarrow x^2=x+1\Rightarrow x^2-x-1=0\Rightarrow x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$



$\because x>0$，故 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

10. ISO 216 規定，B 系列紙張的長（或寬）是「編號相同」與「前一號」的 A 系列紙張長（或寬）的幾何平均。例如，B4 紙張的長 $=\sqrt{\text{A4 的長}\times\text{A3 的長}}$，B4 紙張的寬 $=\sqrt{\text{A4 的寬}\times\text{A3 的寬}}$。試求：

(1) B4 紙張與 A4 紙張的面積比值為________。（5 分）

(2) 由(1)可推論同編號 B 系列紙張與 A 系列紙張的面積比值都相等，已知 A0 紙張面積為 1 平方公尺，則 B0 紙張面積為________平方公尺。（5 分）

解 (1) $\dfrac{\text{B4 紙張面積}}{\text{A4 紙張面積}}=\dfrac{\text{B4 的長}\times\text{B4 的寬}}{\text{A4 的長}\times\text{A4 的寬}}$

$=\dfrac{\sqrt{\text{A4 的長}\times\text{A3 的長}}\times\sqrt{\text{A4 的寬}\times\text{A3 的寬}}}{\sqrt{\text{A4 的長}\times\text{A4 的長}}\times\sqrt{\text{A4 的寬}\times\text{A4 的寬}}}$

$=\dfrac{\sqrt{\text{A3 的長}}\times\sqrt{\text{A3 的寬}}}{\sqrt{\text{A4 的長}}\times\sqrt{\text{A4 的寬}}}$ （A3 的寬 = A4 的長）

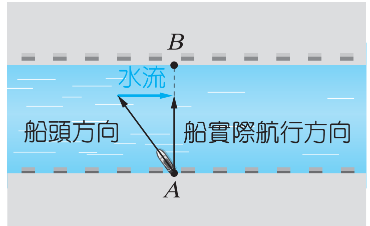
$=\dfrac{\sqrt{\text{A3 的長}}}{\sqrt{\text{A4 的寬}}}$ （A3 的長 = 2 × A4 的寬）

$=\sqrt{2}$

(2) B0 紙張面積 = A0 紙張面積 $\times\sqrt{2}=1\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$（平方公尺）

四、計算題（每題 10 分，共 20 分）

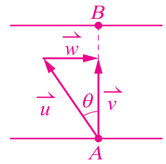
11. 如右圖所示，在寬 600 公尺，水流速度每秒 3 公尺的筆直河道中，小輝駕駛一艘船，希望以 150 秒的時間從河岸 A 處開到正對岸 B 處。試問：



(1) 小輝應以每秒多少公尺的速度駕駛？（若有小數，請四捨五入至小數點後第一位）（5 分）

(2) 船頭方向與線段 AB 夾角的餘弦值為多少？（5 分）

解 (1) 如右圖，設船駕駛速度為 $\vec{u}$，$\vec{u}$ 與水流速度 $\vec{w}$ 合成速度為 $\vec{v}$



則 $|\vec{v}| = \dfrac{600}{150} = 4$（公尺／秒）

又水流速度 $|\vec{w}| = 3$

故 $|\vec{u}| = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$（公尺／秒）

(2) 設船頭方向與線段 AB 的夾角為 θ，則

$$\cos\theta = \frac{5^2+4^2-3^2}{2\times5\times4} = \frac{4}{5}$$

12. 根據國際標準化組織（ISO）的規定，A 系列紙張的「寬長比」都是 $1：\sqrt{2}$，而且將 A0 紙張的長邊對半裁切可以得到 2 張 A1 紙張，將 A1 紙張的長邊對半裁切可以得到 2 張 A2 紙張，以此類推。已知 A0 紙張面積為 1 平方公尺，根據 ISO 的規定，試求 A4 紙張的面積為多少平方公分？

解 1 平方公尺 = 10000 平方公分

從 A0 到 A4 需經過 4 次對半裁切

故 A4 紙張面積為 $10000\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = 625$（平方公分）