

一、單選題 (每題 5 分, 共 10 分)

1. 已知 $\log x = 5 + \log 7.456$, 則 $x = ?$

- (A) 12.456 (B) 37.28 (C) 7.456^5 (D) 745600 (E) 745600000

解 由對數的定義

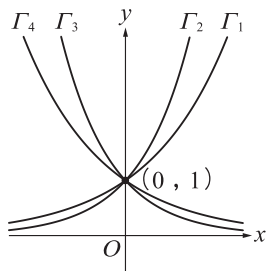
$$\begin{aligned} x &= 10^{5 + \log 7.456} \\ &= 10^5 \times 10^{\log 7.456} \\ &= 100000 \times 7.456 = 745600 \end{aligned}$$

故選(D)

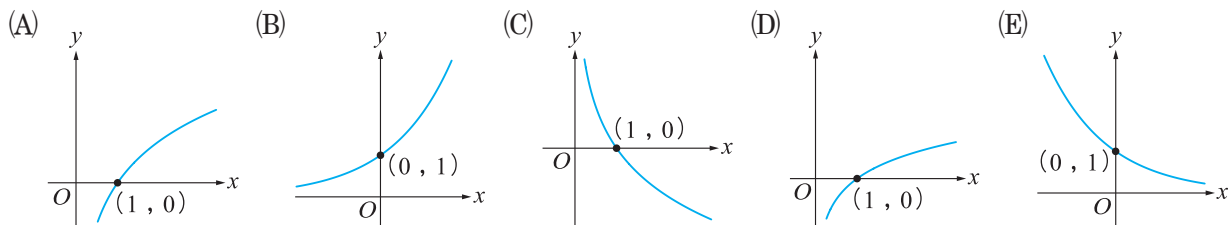
2. 右圖中四個曲線 Γ_1 、 Γ_2 、 Γ_3 、 Γ_4 依序為函數 $y = a^x$ 、 $y = b^x$ 、 $y = c^x$ 、 $y = d^x$ 的圖形, 則在 a 、 b 、 c 、 d 中, 哪一個數最大?

- (A) a (B) b (C) c
(D) d (E) 無法判斷

解 觀察 Γ_1 、 Γ_2 , 圖形由左而右上升, 則底數大於 1 $\therefore a, b > 1$
 觀察 Γ_3 、 Γ_4 , 圖形由左而右下降, 則底數小於 1 $\therefore 0 < c, d < 1$
 比較 Γ_1 、 Γ_2 的圖形 $\therefore \Gamma_2$ 上升的幅度比 Γ_1 大 $\therefore b > a$
 故選(B)



二、多選題 (每題 5 分, 所有選項均答對者得 5 分, 錯一個選項得 3 分, 錯兩個選項得 1 分, 其餘不給分, 共 10 分)

3. 已知 $a > 0$, $a \neq 1$, 試問下列哪些圖形可以是函數 $y = a^x$ 圖形的一部分?解 指數函數圖形必通過點 $(0, 1)$ 當 $a > 1$ 時, 圖形由左而右上升當 $0 < a < 1$ 時, 圖形由左而右下降

故選(B)(E)

4. 當對數 $\log_a x$ 的底數、真數不滿足特定條件時，我們稱此對數無意義，則下列哪些選項中的對數無意義？

(A) $\log_7(-12)$ (B) $\log_{(-3)} 5$ (C) $\log_2 \sqrt{5}$ (D) $\log_{\sqrt{3}-1} 2$ (E) $\log_1 6$

解 (A) ×：真數不可小於 0，故無意義
(B) ×：底數不可小於 0，故無意義
(C)(D) ○：符合對數的意義
(E) ×：底數不可等於 1，故無意義
故選(A)(B)(E)

三、填充題（每格 10 分，共 60 分）

5. 假設服用某種藥物後，每 6 小時可以代謝掉四分之一，則服用該藥物 160 毫克 (mg)，經過 24 小時後，體內的藥物殘留量還有_____毫克。

解 因為每 6 小時身體可以代謝掉 $\frac{1}{4}$ 的藥物，所以 6 小時後，體內還殘留 $\frac{3}{4}$ 的藥物

故經過 24 小時後，體內的藥物殘留量還有 $160 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{24}{6}} = \frac{405}{8}$ (毫克)





6. 已知銀行定存的年利率為 3%，現在小雯存入 200000 元，每年複利計息一次，則在 _____ 年以後，其本利和會超過 250000 元。（已知 $\log 1.25 \approx 0.0969$ ， $\log 1.03 \approx 0.0128$ ，無條件進入至整數位）

解 假設 x 年後其本利和會超過 250000 元

$$\text{可得 } 200000(1 + 3\%)^x > 250000 \Rightarrow (1 + 3\%)^x > 1.25 \Rightarrow x > \log_{1.03} 1.25$$

$$\text{由換底公式可知 } \log_{1.03} 1.25 = \frac{\log 1.25}{\log 1.03}$$

$$\text{則 } x > \frac{\log 1.25}{\log 1.03} \approx \frac{0.0969}{0.0128} \approx 7.5703$$

取 $x = 8$ ，因此 8 年以後小雯的本利和會超過 250000 元

7. 天文學家用視星等 (apparent magnitude)、絕對星等 (absolute magnitude) 來表示星體的亮暗程度，其中視星等是我們在地球上觀測到的亮度，絕對星等則是假想在距離星體 10 秒差距 (約 32.616 光年) 遠的地方所觀測到的視星等。絕對星等 M 與視星等 m 可用如下的

公式轉換： $M = m - 5 \log \frac{d}{32.616}$ (d 為觀測的恆星與地球之間的距離，單位為光年)。已

知夏天三角形之一的「天津四」，其絕對星等為 -7.2 ，視星等為 1.25 ，則天津四到地球的距離約為 _____ 光年。（已知 $10^{1.69} \approx 49$ ，四捨五入至百位）

解 假設天津四到地球的距離為 d 光年

$$\text{由題目可知 } -7.2 = 1.25 - 5 \log \frac{d}{32.616}$$

$$\text{則 } 5 \log \frac{d}{32.616} = 8.45 \Rightarrow \log \frac{d}{32.616} = 1.69 \Rightarrow \frac{d}{32.616} = 10^{1.69}$$

$$\Rightarrow d = 32.616 \times 10^{1.69} \approx 32.616 \times 49 = 1598.184 \approx 1600$$

故可知天津四到地球的距離約為 1600 光年

8. 蒲福風級 (Beaufort scale) 是由英國海軍上將蒲福 (Francis Beaufort) 於 1805 年發明，用風力等級來表示風的強弱程度。經過多次校正，目前使用的經驗關係式為 $V = 0.836 \times B^{\frac{3}{2}}$ ，其中 B 為蒲福風級， V 為風速 (公尺/秒)。某次颱風來襲，氣象局預估海上風力可達 8 級 (稱為大風 gale)，則利用上述經驗關係式推算，風速可達 _____ 公尺/秒。(已知 $\sqrt{2} \approx 1.414$ ，四捨五入至小數點後第一位)

解 由經驗關係式

$$\begin{aligned} V &= 0.836 \times B^{\frac{3}{2}} = 0.836 \times 8^{\frac{3}{2}} = 0.836 \times 16\sqrt{2} \\ &\approx 18.913664 \approx 18.9 \text{ (公尺/秒)} \end{aligned}$$

9. 當溶液的氫離子濃度為 r 莫耳/升時，此溶液的 pH 值為 $-\log r$ 。假設有一杯酸性溶液 pH 值為 3.2，則此溶液的氫離子濃度為 _____ 莫耳/升。(已知 $10^{0.8} \approx 6.3$ ，以科學記號表示，係數部分取二位有效數字)

解 設此酸性溶液的氫離子濃度為 r 莫耳/升

則由已知條件知 $-\log r = 3.2$

$$\text{得 } \log r = -3.2 \Rightarrow r = 10^{-3.2} = 10^{-4+0.8} = 10^{0.8} \times 10^{-4} \approx 6.3 \times 10^{-4}$$

故此酸性溶液的氫離子濃度為 6.3×10^{-4} 莫耳/升

10. 碳 14 是碳元素的一種同位素，半衰期約為 5700 年。通常生物體內的碳 14 含量與大氣相同，但生命停止後就開始衰減，因此科學家檢測古生物的碳 14 相對於正常含量的比例，就可以推算出此古生物的年代。假設現有一人類學家挖出一個人類的頭蓋骨，其碳 14 含量相對於正常含量為 20%，則可以推算出其年代距今約為 _____ 年前。(已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 5 \approx 0.6990$ ，四捨五入至百位)

解 假設其年代距今 x 年，則 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5700}} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{x}{5700} = \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5}$

$$\text{由換底公式可知 } \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{5} = \frac{\log \frac{1}{5}}{\log \frac{1}{2}} = \frac{-\log 5}{-\log 2} = \frac{\log 5}{\log 2} \approx \frac{0.6990}{0.3010} \approx 2.3222$$

$$\text{則 } x \approx 5700 \times 2.3222 = 13236.54 \approx 13200$$

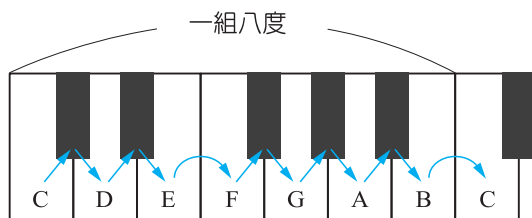
故可知其年代距今約為 13200 年前



四、計算題（每題 10 分，共 20 分）

11. 在音樂裡，由 Do 到 Do（即 Do，Re，Mi，Fa，Sol，La，Si，Do）稱為八度音程。如果把經過的半音也算進來，共有 12 個音，我們稱為一組八度。其中較高音的 Do，頻率恰為較低音 Do 的 2 倍。以鋼琴為例，一組八度含 7 個白鍵與 5 個黑鍵。音樂史上，為了解決一些問題，規定由較低音往較高音上升時，相鄰兩個音的頻率保持固定的比例，這就是「十二平均律」，試問：

- (1) 相鄰兩個音中，較高音的頻率是較低音的頻率的幾倍？（5 分）
- (2) 若標準 A 音（唱 La）頻率是 440Hz，試求升高 2 個半音的 B 音（唱 Si 或 Ti）頻率為多少？（5 分）



解 (1) 假設較低音的 Do 頻率為 f ，每升高半音，頻率變為 r 倍

∵ 較高音的 Do 與較低音的 Do 相差 12 個半音

$$\therefore f \times r^{12} = 2f \Rightarrow r^{12} = 2$$

故得 $r = \sqrt[12]{2}$

$$(2) \text{ B 音的頻率為 } 440 \times r^2 = 440 \times (\sqrt[12]{2})^2 = 440\sqrt[6]{2} \text{ (Hz)}$$

12. 統計學家克利夫蘭發現：我們眼睛看到的圖形面積大小與此圖形實際面積的 0.7 次方成正比。例如，大圖形是小圖形的 3 倍，眼睛感覺到的只有 $3^{0.7}$ （約 2.16）倍。觀察某國地圖，感覺全國面積大約是某一個州面積的 10 倍，則這個國家的實際面積大約是該州實際面積的幾倍？（已知 $10^{\frac{10}{7}} \approx 26.8270$ ，四捨五入至整數位）

解 假設這個國家的實際面積大約是該州的 k 倍

$$\text{則 } k^{0.7} = 10$$

$$\Rightarrow k = 10^{\frac{10}{7}} \approx 26.8270 \approx 27$$

故這個國家的實際面積大約是該州實際面積的 27 倍