2-2 對　數

重點整理

一、常用對數的性質

1. 設 r，$s>0$，t 為實數，則：

(1) $\log r+\log s=\log rs$。

例：$\log 2+\log 5=\log 10$。

(2) $\log r-\log s=\log\dfrac{r}{s}$。

例：$\log 200-\log 2=\log 100$。

(3) $\log r^t=t\log r$。

例：$\log 7^3=3\log 7$。

2. 對數方程式：

從常用對數的意義可以解簡單的對數方程式，詳見後面例題。

二、一般對數與常用對數的關係

1. 一般對數：

設底數 $a>0$，$a\neq 1$，且 $r>0$，若實數 b 滿足 $a^b=r$，則稱 b 為「以 a 為底數，r 為真數的對數」，記為 $b=\log_a r$。

$\log_a r$ ← 真數（r）　← 底數（a）

例：因為 4 滿足 $3^4=81$，我們稱 4 是「以 3 為底數，81 為真數的對數」，記為 $4=\log_3 81$。

2. 常用對數：

以 10 為底數的對數就是常用對數，亦即 $\log_{10}r=\log r$。

例：$\log_{10}3=\log 3$。$\log_{10}7=\log 7$。

3. 換底公式：

設 $a>0$，且 $a\neq 1$，對於任意正實數 r，均有 $\log_a r=\dfrac{\log r}{\log a}$。

例：$\log_5 7=\dfrac{\log 7}{\log 5}$。

三、對數的應用

1. 七二法則：

若每期利率為 x % 且以複利計算，則本利和達到原來本金的兩倍所需時間大約要 $\dfrac{72}{x}$ 期。

例：將 100 萬元存入年利率 3 %，每年複利計息一次的銀行，則大約需 $\dfrac{72}{3}=24$ 年會使得本利和變成 200 萬元。

2. 常數 e 的認識：

當 n 值無限增加時，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 的值會愈來愈趨近一個數 2.71828……，記為 e。

e 是自然對數 $\ln x$ 的底數，即 $\ln x=\log_e x$。

例題 1　常用對數求值

試求下列各值：

(1) $\log 10000$。（2 分）　(2) $\log \dfrac{1}{10000}$。（2 分）　(3) $\log 0.00001$。（2 分）

(4) $\log \sqrt[3]{10000}$。（2 分）　(5) $\log 10^{0.9425}$。（2 分）

解 (1) $\because\ 10000 = 10^4 \quad \therefore\ \log 10000 = 4$

(2) $\because\ \dfrac{1}{10000} = 10^{-4} \quad \therefore\ \log \dfrac{1}{10000} = -4$

(3) $\because\ 0.00001 = 10^{-5} \quad \therefore\ \log 0.00001 = -5$

(4) $\because\ \sqrt[3]{10000} = 10^{\frac{4}{3}} \quad \therefore\ \log \sqrt[3]{10000} = \dfrac{4}{3}$

(5) $\log 10^{0.9425} = 0.9425$

例題 2　常用對數性質的應用(一)

試利用科學記號與常用對數的性質，說明下列各式成立：

(1) $\log 300000 = 5 + \log 3$。（3 分）

(2) $\log 300 = 2 + \log 3$。（3 分）

(3) $\log 0.0003 = -4 + \log 3$。（4 分）

解 (1) $\log 300000 = \log(3 \times 10^5) = \log 3 + \log 10^5 = 5 + \log 3$

(2) $\log 300 = \log(3 \times 10^2) = \log 3 + \log 10^2 = 2 + \log 3$

(3) $\log 0.0003 = \log(3 \times 10^{-4}) = \log 3 + \log 10^{-4} = -4 + \log 3$

例題 3 常用對數性質的應用(二)

(1) 已知 $\log 5 \approx 0.69897$，試求 $\log 5000$。（2 分）

(2) 已知 $\log 1.32 \approx 0.12057$，試求 $\log 0.000132$。（2 分）

(3) 試求 $\log 250 + \log 4$。（3 分）

(4) 試求 $\log 175 - \log 14 + \log 8$。（3 分）

解 (1) $\log 5000 = \log(5 \times 10^3) = 3 + \log 5 \approx 3.69897$

(2) $\log 0.000132 = \log(1.32 \times 10^{-4}) = -4 + \log 1.32 \approx -4 + 0.12057 = -3.87943$

(3) $\log 250 + \log 4 = \log(250 \times 4)$

$= \log 1000 = \log 10^3 = 3$

(4) $\log 175 - \log 14 + \log 8 = \log \dfrac{175 \times 8}{14}$

$= \log 100 = \log 10^2 = 2$

例題 4 換底公式的應用(一)

試利用換底公式，將下列各一般對數換成常用對數形式：

(1) $\log_2 7$。（2 分）

(2) $\log_5 0.24$。（2 分）

(3) $\log_{\frac{1}{4}} 43$。（2 分）

(4) 以 $\log 3$ 表示 $\log_3 3000$。（2 分）

(5) 以 $\log 2$，$\log 3$ 表示 $\log_2 72$。（2 分）

解

(1) $\log_2 7 = \dfrac{\log 7}{\log 2}$

(2) $\log_5 0.24 = \dfrac{\log 0.24}{\log 5} = \dfrac{\log \frac{24}{100}}{\log 5} = \dfrac{3\log 2 + \log 3 - 2}{\log 5}$

(3) $\log_{\frac{1}{4}} 43 = \dfrac{\log 43}{\log \frac{1}{4}} = -\dfrac{\log 43}{\log 4} = -\dfrac{\log 43}{2\log 2}$

(4) $\log_3 3000 = \dfrac{\log 3000}{\log 3} = \dfrac{\log(3 \times 10^3)}{\log 3} = \dfrac{\log 3 + \log 10^3}{\log 3} = \dfrac{3 + \log 3}{\log 3} = 1 + \dfrac{3}{\log 3}$

(5) $\log_2 72 = \dfrac{\log 72}{\log 2} = \dfrac{\log(2^3 \times 3^2)}{\log 2} = \dfrac{\log 2^3 + \log 3^2}{\log 2}$

$= \dfrac{3\log 2 + 2\log 3}{\log 2} = 3 + \dfrac{2\log 3}{\log 2}$

例題 5　用定義解簡單的對數方程式

試利用常用對數的定義解下列各式的 x 值：

(1) $\log x=\dfrac{3}{2}$。（5 分）

(2) $\log(3x+4)=2$。（5 分）

解 (1) 由常用對數定義可得

$x=10^{\frac{3}{2}}=10\sqrt{10}$

(2) 由常用對數定義可得

$3x+4=10^2=100$

移項解得 $x=32$

例題 6　用對數解指數方程式

試利用對數的性質求解下列各式的 x 值：（以 log 形式呈現）

(1) $2.37^x=4$。（5 分）

(2) $5^x=3.1416$。（5 分）

解 (1) 兩邊取對數可得 $\log 2.37^x=\log 4$

由對數的性質得 $x\log 2.37=\log 4$

移項得 $x=\dfrac{\log 4}{\log 2.37}$

(2) 兩邊取對數可得 $\log 5^x=\log 3.1416$

由對數的性質得 $x\log 5=\log 3.1416$

移項得 $x=\dfrac{\log 3.1416}{\log 5}$

例題 7　換底公式的應用(二)

試利用換底公式計算下列各式：

(1) $\log_5 9\times\log_9 13\times\log_{13} 17\times\log_{17} 21\times\log_{21} 25$。（5 分）

(2) $\log_3 5\times\log_5 7\times\log_7 9\times\log_9 11\times\cdots\cdots\times\log_{79} 81$。（5 分）

解 (1) $\log_5 9\times\log_9 13\times\log_{13} 17\times\log_{17} 21\times\log_{21} 25$

$=\dfrac{\log 9}{\log 5}\times\dfrac{\log 13}{\log 9}\times\dfrac{\log 17}{\log 13}\times\dfrac{\log 21}{\log 17}\times\dfrac{\log 25}{\log 21}$

$=\dfrac{\log 25}{\log 5}=\dfrac{\log 5^2}{\log 5}=\dfrac{2\log 5}{\log 5}=2$

(2) 同(1)，使用換底公式，可得

$\log_3 5\times\log_5 7\times\log_7 9\times\log_9 11\times\cdots\cdots\times\log_{79} 81$

$=\dfrac{\log 81}{\log 3}=\dfrac{\log 3^4}{\log 3}=4$

例題 8　對數的應用㈠：聲音強度與分貝數

日常生活裡，常用分貝數 D 的大小來表示聲音的強弱。將測得的聲音強度 I，代入關係式 $D=10\times\log\dfrac{I}{I_0}$（dB），可得到此聲音強度 I 的分貝數。其中，聲音強度的單位是「瓦特／平方公尺」（$W／m^2$），I_0 則是一個定值。試回答下列問題：

⑴ 若兩人交談音量為 60 分貝，室外噪音是 80 分貝，則室外噪音的聲音強度是兩人交談聲音強度的多少倍？（5 分）

⑵ 若球場上啦啦隊 1 支汽笛獨鳴的噪音達 75 分貝，且 100 支汽笛合鳴的聲音強度為 1 支汽笛獨鳴的 100 倍，試問 100 支汽笛合鳴的噪音為多少分貝？（5 分）

解 ⑴ 設兩人交談的聲音強度為 I_1，

室外噪音的聲音強度為 I_2，則

$$\begin{cases}10\times\log\dfrac{I_1}{I_0}=60\\10\times\log\dfrac{I_2}{I_0}=80\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\log\dfrac{I_1}{I_0}=6\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①\\\log\dfrac{I_2}{I_0}=8\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots②\end{cases}$$

由②－①得 $\log\dfrac{I_2}{I_0}-\log\dfrac{I_1}{I_0}=2$，則 $\log\dfrac{I_2\times I_0}{I_0\times I_1}=2\Rightarrow\log\dfrac{I_2}{I_1}=2$

因此 $\dfrac{I_2}{I_1}=10^2=100$（倍）

⑵ 設 1 支汽笛的聲音強度為 I

則 $10\log\dfrac{I}{I_0}=75$，得 $\log\dfrac{I}{I_0}=\dfrac{15}{2}$

而 100 支汽笛的聲音強度為 $100I$，則其噪音為

$$10\log\frac{100I}{I_0}=10\log\left(100\times\frac{I}{I_0}\right)=10\left(\log100+\log\frac{I}{I_0}\right)=10\left(2+\frac{15}{2}\right)$$

$$=10\times\frac{19}{2}=95\text{（分貝）}$$

2-2

翰林用心教師用精益求精

例題 9　對數的應用㈡：酸鹼度與 pH 值

當溶液的氫離子濃度為 r 莫耳／升時，此溶液的 pH 值為 $-\log r$。則：

⑴ 某中性液體的氫離子濃度是 10^{-7} 莫耳／升，試求其 pH 值？（5 分）

⑵ 有一杯檸檬汁的 pH 值為 4，試求此檸檬汁的氫離子濃度為多少莫耳／升？（5 分）

解 ⑴ 由 pH 值為 $-\log r$，得此溶液 pH 值為 $-\log 10^{-7}=-(-7)=7$

⑵ 設此檸檬汁的氫離子濃度為 x 莫耳／升

由 pH 值為 $-\log r$

得 $4=-\log x \Rightarrow \log x=-4 \Rightarrow x=10^{-4}$

故可知此檸檬汁的氫離子濃度為 10^{-4} 莫耳／升

例題 10　對數的應用㈢：地震規模與釋出的能量

日常生活裡，我們常用規模來描述地震的大小，這個數值的大小與地震所釋放的能量有關。根據地震學家古騰堡（Gutenberg）的公式，地震所釋放的能量 E（單位：爾格，erg）與芮氏地震規模（Richter Magnitude Scale）M 的關係為：$\log E=11.8+1.5M$。資料顯示，西元 2004 年 12 月 26 日印尼蘇門答臘發生規模 9.0 的地震，而 2020 年 1 月 7 日波多黎各發生規模為 6.5 的地震。若蘇門答臘地震所釋放出的能量是波多黎各地震的 10^k 倍，試問 $k=$？（10 分）

解 設蘇門答臘地震釋放的能量為 E_1，波多黎各地震釋放的能量為 E_2

則 $\begin{cases}\log E_1=11.8+1.5\times 9.0 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{①}\\ \log E_2=11.8+1.5\times 6.5 \cdots\cdots\cdots\cdots\text{②}\end{cases}$

由① − ②得 $\log E_1-\log E_2=1.5\times 2.5$

則 $\log\dfrac{E_1}{E_2}=3.75 \Rightarrow \dfrac{E_1}{E_2}=10^{3.75}$（倍）

故 $k=3.75$

〈另解〉

設蘇門答臘地震釋放的能量為 E_1，波多黎各地震釋放的能量為 E_2

則 $\log E_1=11.8+1.5\times 9.0=25.3$，得 $E_1=10^{25.3}$

$\log E_2=11.8+1.5\times 6.5=21.55$，得 $E_2=10^{21.55}$

因此 $\dfrac{E_1}{E_2}=\dfrac{10^{25.3}}{10^{21.55}}=10^{25.3-21.55}=10^{3.75}$（倍）

故 $k=3.75$