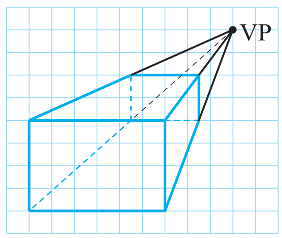
3-3 平面上的比例

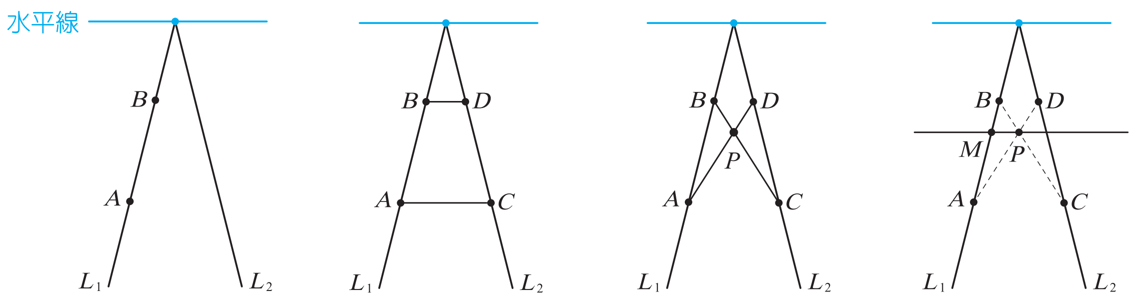
重點整理

一、單點透視法

1. 透視法：
   把立體的空間形象表現在平面上，使觀看的人對平面畫產生空間立體感的繪畫方法。
2. 消失點（VP）：
   空間中互相平行的直線，在透視圖裡交於同一點，稱為消失點（vanishing point）。
3. 水平線：
   過消失點的等高線，稱為水平線。
4. 單點透視法：
   在平面的透視圖中，讓空間中原本互相平行的直線都交會到同一個消失點。
   例：下圖長方體的四個稜是平行的，但是在單點透視圖裡，它們會交於消失點。



5. 單點透視圖中平行線段的中點：



   如上圖，欲求線段 AB 的中點，如下步驟：
   (1) 過 A、B 兩點作水平線的平行線，分別交 L_2 於 C、D 兩點。
   (2) 連接 $\overline{AD}$、$\overline{BC}$，此兩線段交於 P 點。
   (3) 過 P 點作水平線的平行線，交 L_1 於 M 點，即為所求。

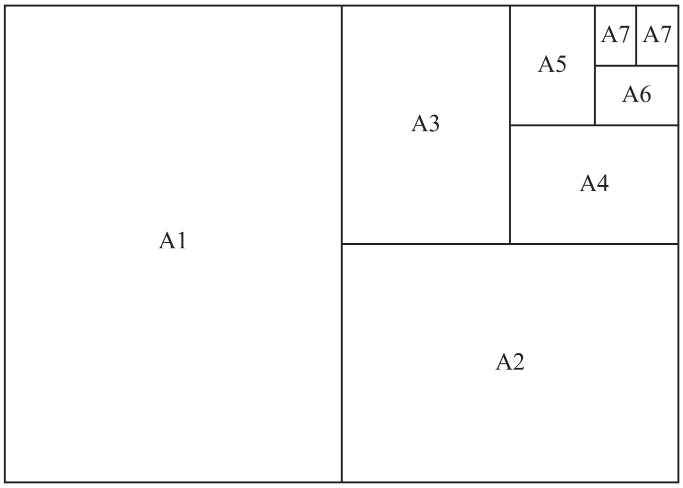
二、A 系列紙張規格

國際標準化組織（International Organization for Standardization）針對紙張尺寸制定國際標準 ISO 216，重點如下：

1. 特性：
   長邊對半裁切前後，長與寬的比值都是 $\sqrt{2}$，也就是長寬比為 $\sqrt{2}：1$（寬長比為 $1：\sqrt{2}$）。

2. A 系列紙張：

將 A0 紙張的長邊對半裁切可得 2 張 A1 大小的紙張，同理 A1 紙張對半裁切可得 2 張 A2 紙張，以此類推。



例：將 A4 紙張的長邊對半裁切，可以得到 2 張 A5 大小的紙張。

3. B 系列紙張：

紙張的長（或寬）是「編號相同」與「前一號」的 A 系列紙張長（或寬）的幾何平均。例如，B4 紙張的長是 A4 紙張的長與 A3 紙張的長的幾何平均，B4 紙張的寬是 A4 紙張的寬與 A3 紙張的寬的幾何平均。

例：已知 A4 紙張的長為 297 毫米（mm），寬為 210 毫米（mm），A3 紙張的長為 420 毫米（mm）、寬為 297 毫米（mm），則

B4 紙張的長 $= \sqrt{\text{A4 的長} \times \text{A3 的長}}$，B4 紙張的寬 $= \sqrt{\text{A4 的寬} \times \text{A3 的寬}}$，

故得 B4 紙張的長為 $\sqrt{297 \times 420} \approx 353$ 毫米（mm），寬為 $\sqrt{210 \times 297} \approx 250$ 毫米（mm）。

三、黃金比例與螺線

1. 黃金比例（golden ratio）：

(1) 費氏數列：

1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，……。第 3 項開始，每一項都是前兩項之和。

例：費氏數列第 12 項至第 16 項也可由各自的前兩項求出，詳見後面例題。

(2) 黃金比例：

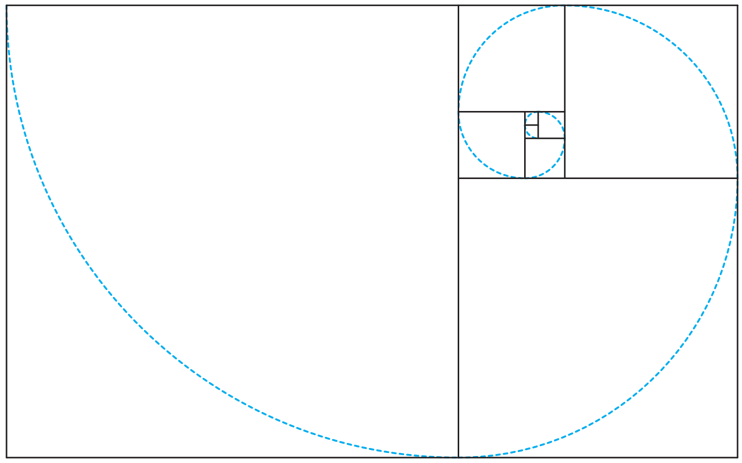
費氏數列相鄰兩項的後項除以前項，這些比值逐漸接近

$\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$（$= 1.6180\cdots\cdots$），稱為黃金比例。

例：將費氏數列第 11 項至第 13 項依序用後項除以前項，可得近似黃金比例的比值，詳見後面例題。

2. 螺線（spiral）：

(1) 圍繞一個定點（或軸）轉動，同時又逐漸遠離的動點所形成的軌跡，稱為螺線。等角螺線（equiangular spiral）又稱為對數螺線（logarithmic spiral），可見於大自然中，如蜘蛛網。

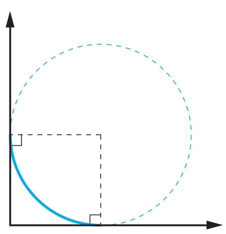


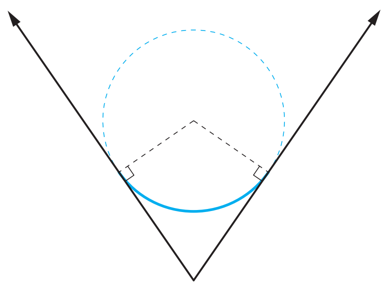
(2) 費氏數列與螺線：由螺線開頭所在的正方形循著螺線的順序，各正方形邊長依序為 1，1，2，3，5，8，13，21，34，……。

四、平面幾何與設計

▩ 圓角：

把角的頂點與兩邊的一部分換為一段圓弧，稱為圓角（fillet）。用個淺顯的說法，就是把角的直角（或尖銳的角）換成圓弧。生活中處處可見圓角的造型，如看板、家具、電器的四個角，或手機桌面的圖示等。如下圖所示，圓弧與角的兩射線平滑相接，角的兩邊恰好是圓的切線。

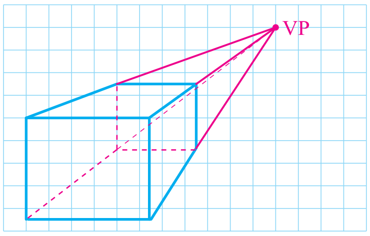




例題 1　單點透視法實作

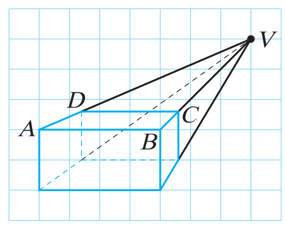
下圖是單點透視圖中的一個長方體，試畫出消失點。（5 分）

解



例題 2　單點透視圖邊長與比例的關係

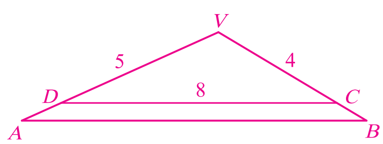
如右圖，在單點透視圖中有一個長方體，四邊形 $ABCD$ 是長方體的一個面，V 是消失點。假設 $\overline{CD}=8$，$\overline{BC}=1$，$\overline{VB}=5$，$\overline{VD}=5$，試求：



(1) $\overline{AB}$。（5 分）

(2) $\overline{AD}$。（5 分）

解　如右圖，$\overline{AB}\,//\,\overline{CD}$　$\therefore \triangle VDC \sim \triangle VAB$



(1) $\overline{VC}=\overline{VB}-\overline{BC}=5-1=4$

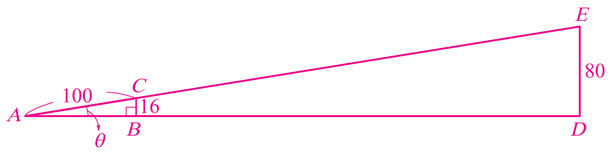
$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{CD}}=\dfrac{\overline{VB}}{\overline{VC}}$，即 $\dfrac{\overline{AB}}{8}=\dfrac{5}{4}$，得 $\overline{AB}=10$

(2) $\dfrac{\overline{VD}}{\overline{AD}}=\dfrac{\overline{VC}}{\overline{BC}}$，即 $\dfrac{5}{\overline{AD}}=\dfrac{4}{1}$，得 $\overline{AD}=\dfrac{5}{4}$

例題 3　坡道的比例關係

小雯在一條坡度固定的上坡路段行走 100 公尺後，發現自己的垂直高度上升了 16 公尺，如果希望垂直高度比出發點上升 80 公尺，則必須沿著上坡路再走幾公尺？（5 分）

解　如右圖所示，$\triangle ABC \sim \triangle ADE$



$\dfrac{\overline{AE}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{BC}}$，即 $\dfrac{\overline{AE}}{80} = \dfrac{100}{16}$，得 $\overline{AE} = 500$

所求為 $\overline{CE} = \overline{AE} - \overline{AC} = 500 - 100 = 400$

故必須再走 400 公尺

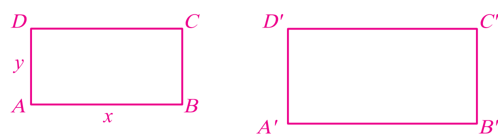
例題 4　等比例矩形的周長比與面積比

將一張矩形 $ABCD$ 的照片用影印機放大為原尺寸的 125 %，得到放大後的矩形 $A'B'C'D'$，點 A、B、C、D 分別對應到 A'、B'、C'、D' 四點，試求：

(1) $\overline{AB} : \overline{A'B'}$。（5 分）　　(2) $\overline{AC} : \overline{A'C'}$。（5 分）

(3) $\dfrac{ABCD\text{ 周長}}{A'B'C'D'\text{ 周長}}$。（5 分）　　(4) $\dfrac{ABCD\text{ 面積}}{A'B'C'D'\text{ 面積}}$。（5 分）

解　如右圖，令 $\overline{AB} = x$，$\overline{AD} = y$



則 $\overline{A'B'} = (125\ \%)\overline{AB} = \dfrac{5}{4}x$

$\overline{A'D'} = (125\ \%)\overline{AD} = \dfrac{5}{4}y$

(1) $\overline{AB} : \overline{A'B'} = x : \dfrac{5}{4}x = 4 : 5$

(2) $\overline{AC} : \overline{A'C'} = \sqrt{x^2+y^2} : \sqrt{\dfrac{25}{16}(x^2+y^2)} = \sqrt{x^2+y^2} : \dfrac{5}{4}\sqrt{x^2+y^2} = 1 : \dfrac{5}{4} = 4 : 5$

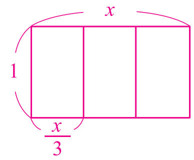
(3) $\dfrac{ABCD\text{ 周長}}{A'B'C'D'\text{ 周長}} = \dfrac{2(x+y)}{2\left(\dfrac{5}{4}x + \dfrac{5}{4}y\right)} = \dfrac{2(x+y)}{2 \times \dfrac{5}{4}(x+y)} = \dfrac{4}{5}$

(4) $\dfrac{ABCD\text{ 面積}}{A'B'C'D'\text{ 面積}} = \dfrac{xy}{\left(\dfrac{5}{4}x\right)\left(\dfrac{5}{4}y\right)} = \dfrac{xy}{\dfrac{25}{16}xy} = \dfrac{16}{25}$

例題 5　矩形長邊裁切前後寬長比不變的方法

將長方形紙張的長邊三等分裁切以後，寬長比保持不變，試求此長方形紙張的寬長比。（10 分）

解



設寬長比為 $1:x$，則三等分以後的寬長比為 $\frac{x}{3}:1$

故得 $1:x=\frac{x}{3}:1$，得 $\frac{x^2}{3}=1$，移項得 $x^2=3$

$\because x>0$，取 $x=\sqrt{3}$，故所求為 $1:\sqrt{3}$

例題 6　A0 紙張的長與寬

根據國際標準化組織（ISO）的規定，A 系列紙張的長寬比都是 $\sqrt{2}:1$。已知 A0 紙張的面積為 1 平方公尺，試問 A0 紙張的長為多少公分？（已知 $2^{0.25}\approx 1.1892$，四捨五入至小數點後第一位）（10 分）

解　設 A0 紙張的長、寬分別為 $\sqrt{2}x$、x 公分

則 A0 紙張的面積為 $\sqrt{2}x^2=10000$（平方公分）

移項得 $x^2=\frac{10000}{\sqrt{2}} \Rightarrow x=\frac{100}{2^{0.25}} \Rightarrow \sqrt{2}x=100\times 2^{0.25}\approx 100\times 1.1892\approx 118.9$

故得 A0 紙張的長為 118.9 公分

例題 7　A 系列紙張的面積

根據 ISO 的規定，將 A0 紙張的長邊對半裁切後可以得到 2 張 A1 紙張，將 A1 紙張的長邊對半裁切後，可以得到 2 張 A2 紙張，以此類推。試回答下列問題：

(1) 已知 A0 紙張的面積為 1 平方公尺，則 A5 紙張的面積為多少平方公分？（5 分）

(2) 小明打算將 A4 紙張裁切為 A7 大小的便條紙，如果他打算製作 120 張便條紙，則他需要準備幾張 A4 紙張？（5 分）

解 (1) 1 平方公尺 = 10000 平方公分

從 A0 到 A5 需經過 5 次對半裁切

故 A5 紙張的面積為 $10000\times\left(\frac{1}{2}\right)^5=312.5$（平方公分）

(2) 從 A4 到 A7 經過 3 次對半裁切，張數變為 $2^3=8$（張）

$\because\ 120\div 8=15$　$\therefore$ 需準備 15 張 A4 紙張

例題 8　費氏數列與黃金比例

費氏數列的前 2 項為 1，1，第 3 項開始，每一項都是前兩項之和。已知此數列的前 11 項依序為 1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，試回答下列問題：

(1) 請寫出第 12 項至第 16 項。（5 分）

(2) 請從第 11 項至第 13 項，分別除以相鄰的前項（第 10 項至第 12 項），並四捨五入至小數點後第四位$\left(\text{這些比值會逐漸接近 } \varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1.6180\cdots\cdots\right)$。（5 分）

解 (1) 第 12 項至第 16 項依序為 144，233，377，610，987

(2) 所求為 $\frac{89}{55}=1.61818\cdots\cdots\approx 1.6182$

$\frac{144}{89}=1.61797\cdots\cdots\approx 1.6180$

$\frac{233}{144}=1.61805\cdots\cdots\approx 1.6181$

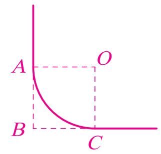
例題 9　圓角相關問題(一)：弧長與面積

為了使設計作品更加美觀，小偉使用圓角器（美角刀）把 B4 卡紙的四個直角裁成圓角。已知圓角器所裁圓弧的半徑為 10 毫米（mm），試求：

(1) 裁下來的碎片其圓弧長為多少毫米（mm）？（5 分）

(2) 每片碎片的面積為多少平方毫米（mm^2）？（5 分）

解



圓心角 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$，半徑 $r=10$

(1) 弧長 $s=r\theta=10\times\dfrac{\pi}{2}=5\pi$ 毫米（mm）

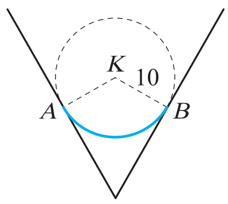
(2) 所求面積為正方形 $OABC$ 面積 − 扇形 OAC 面積，即

$10^2-\dfrac{1}{2}\times10\times5\pi=100-25\pi$ 平方毫米（mm^2）

3-3

例題 10　圓角相關問題(二)

右圖是一個 60° 角置換為圓角的簡圖，已知圓半徑 $r=10$，試求：



(1) 扇形 AKB 的面積。（5 分）

(2) A、B 兩點的距離。（5 分）

解 (1) $\angle AKB=360^\circ-60^\circ-90^\circ-90^\circ=120^\circ$

$120^\circ=120\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{2\pi}{3}$（弳）

故扇形 AKB 的面積為 $\dfrac{1}{2}\times10^2\times\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{100\pi}{3}$ 平方單位

(2) $\triangle AKB$ 中，由餘弦定理可知

$\overline{AB}^2=10^2+10^2-2\times10\times10\cos120^\circ$

$=100+100+100=300$

故 $\overline{AB}=10\sqrt{3}$

翰林用心教師用精益求精