

3-2 平面向量的內積

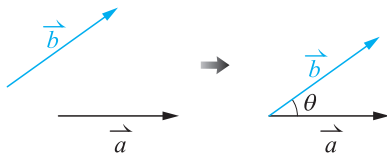
重點整理

一、向量的夾角與內積

1. 向量的夾角：

將兩向量的始點重合，此兩向量所夾的角 θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) 稱為兩向量的夾角。

例：



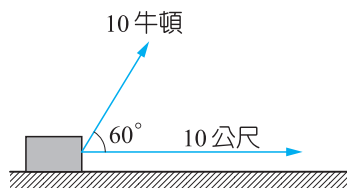
2. 做功的問題：

對物體施力 $\vec{F}$ 產生位移 $\vec{s}$ 所作的功為

$$\begin{aligned} W &= (\text{位移方向的分力}) \times (\text{位移}) \\ &= |\vec{F}| \cos \theta |\vec{s}| \\ &= |\vec{F}| |\vec{s}| \cos \theta. \end{aligned}$$

(用 1 牛頓的力使物體產生 1 公尺位移時，所作的功為 1 焦耳)

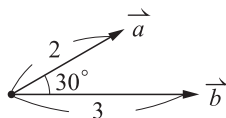
例：如下圖，對物體所作的功為 $10 \cos 60^\circ \times 10 = 50$ 焦耳。



3. 向量的內積：

(1) 兩向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 夾角為 θ ，則 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的內積為 $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$ 。

例：如下圖， $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 30^\circ = 2 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ 。



(2) $\vec{a} = (a_1, a_2)$, $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ，則 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的內積為 $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$ 。

例： $\vec{a} = (2, 1)$, $\vec{b} = (4, 3)$ ，則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 4 + 1 \times 3 = 11$ 。

(3) 設兩個非零向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夾角為 θ ，則 $\cos \theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$ 。

例：若向量 $\vec{a} = (4, 3)$, $\vec{b} = (-5, 12)$ ，夾角為 θ ，則

$$\cos \theta = \frac{4 \times (-5) + 3 \times 12}{\sqrt{4^2 + 3^2} \sqrt{(-5)^2 + 12^2}} = \frac{16}{65}, \text{ 按計算機可得 } \theta \approx 75.7499673^\circ,$$

故知向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夾角大約為 75.7° 。

4. 兩向量垂直的判定法則：

$\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 為平面上兩個非零向量。

(1) 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相垂直，則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ 。

例： $\vec{a} = (3, 6)$ ， $\vec{b} = (2, k)$ ，若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相垂直，則 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，故得
 $6 + 6k = 0$ ，解得 $k = -1$ 。

(2) 若 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ ，則 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相垂直。

例： $\vec{a} = (2, -3)$ ， $\vec{b} = (6, 4)$ ，因為 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 6 - 3 \times 4 = 0$ ，所以 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 互相垂直。

二、內積的性質

設 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{c}$ 為平面上任意向量， γ 為任意實數，則下列性質成立。

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ 。

例： $\vec{a} = (2, 3)$ ， $\vec{b} = (1, 4)$ ，則：

$$(1) \vec{a} \cdot \vec{b} = 2 + 12 = 14。$$

$$(2) \vec{b} \cdot \vec{a} = 2 + 12 = 14。$$

2. $(\gamma \vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\gamma \vec{b}) = \gamma (\vec{a} \cdot \vec{b})$ 。

例： $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (2, 3)$ ， $\gamma = 3$ ，則：

$$(1) (\gamma \vec{a}) \cdot \vec{b} = (3(1, 2)) \cdot (2, 3) = (3, 6) \cdot (2, 3) = 6 + 18 = 24。$$

$$(2) \vec{a} \cdot (\gamma \vec{b}) = (1, 2) \cdot (3(2, 3)) = (1, 2) \cdot (6, 9) = 6 + 18 = 24。$$

$$(3) \gamma (\vec{a} \cdot \vec{b}) = 3((1, 2) \cdot (2, 3)) = 3(2 + 6) = 24。$$

3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ 。

例： $\vec{a} = (3, 2)$ ， $\vec{b} = (1, 4)$ ， $\vec{c} = (2, 1)$ ，則：

$$(1) (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (4, 6) \cdot (2, 1) = 8 + 6 = 14。$$

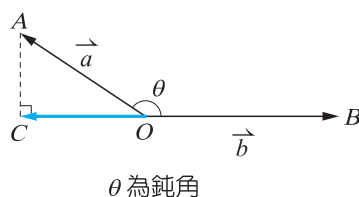
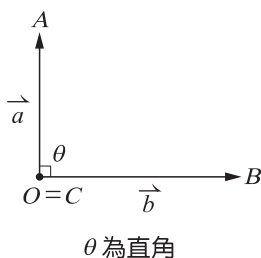
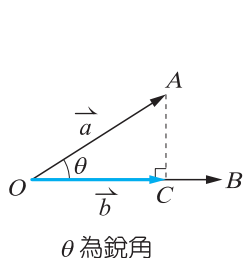
$$(2) \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = (3, 2) \cdot (2, 1) + (1, 4) \cdot (2, 1) = 8 + 6 = 14。$$

4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$ 。

例： $\vec{a} = (-3, 4)$ ，則 $\vec{a} \cdot \vec{a} = (-3, 4) \cdot (-3, 4) = 9 + 16 = 25$ ，
 $|\vec{a}|^2 = (-3)^2 + 4^2 = 25$ 。

三、正射影

設 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ ， $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ 為平面上兩個向量，且 $\vec{b} \neq \vec{0}$ ，其夾角為 θ 。如下圖，從 A 點向直線 OB 作垂線，令垂足為 C ，我們稱 $\overrightarrow{OC}$ 為 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影。



向量 $\vec{a}$ 在向量 $\vec{b}$ 上的正射影為 $\left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \right) \vec{b}$ (仍然是一個向量)。

例：設 $\vec{a} = (-1, 2)$ ， $\vec{b} = (3, 4)$ ，則 $\vec{a}$ 在 $\vec{b}$ 上的正射影為

$$\left(\frac{(-1) \times 3 + 2 \times 4}{3^2 + 4^2} \right) (3, 4) = \frac{5}{25} (3, 4) = \left(\frac{3}{5}, \frac{4}{5} \right)。$$

四、直線的法向量

(a, b) 是直線 $ax + by + c = 0$ 的一個法向量。

例：(1) 直線 $3x - 2y + 5 = 0$ 有一個法向量為 $(3, -2)$ 。

(2) 直線 $x + 3y - 4 = 0$ 有一個法向量為 $(1, 3)$ 。

補充：利用直線法向量的夾角求得兩直線的夾角。

我們在 10 年級(高一)時，利用兩直線的斜率計算直線的夾角。同樣地，我們也可以用直線的法向量求得兩直線的夾角。方法如下：

對相異兩直線 L_1, L_2 分別取法向量 $\vec{n}_1$ 及 $\vec{n}_2$ ，則 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 的夾角 θ 以及 $180^\circ - \theta$ 就是 L_1 與 L_2 的夾角。

例：已知平面上兩直線 $L_1: 3x - 5y - 7 = 0, L_2: x + 4y + 3 = 0$ ，

取 $\vec{n}_1 = (3, -5), \vec{n}_2 = (1, 4)$ ，設夾角為 θ ，則

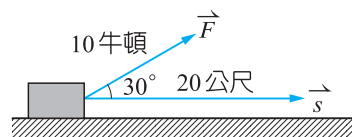
$$\cos \theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{3 \times 1 + (-5) \times 4}{\sqrt{3^2 + (-5)^2} \sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{-17}{17\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$$

得 $\theta = 135^\circ$ 。故 L_1 與 L_2 有一夾角為 135° ，另一夾角為 $180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ 。



●例題 1 做功的問題

如右圖，對物體施力 $\vec{F}$ ，使物體產生位移 $\vec{s}$ 。已知 $\vec{F}$ 的大小為 10 牛頓， $\vec{s}$ 的大小為 20 公尺， $\vec{F}$ 與 $\vec{s}$ 的夾角為 30° ，試求對此物體所作的功為多少焦耳？（10 分）



（說明：用 1 牛頓的力對一物體使其發生 1 公尺的位移所作的功為 1 焦耳）

解 由功的定義知，所求為

$\vec{F}$ 沿物體位移方向的分力大小 $|\vec{F}| \cos 30^\circ$ 乘以位移大小 $|\vec{s}|$

故所作的功為 $|\vec{F}| \cos 30^\circ \times |\vec{s}| = 10 \times \cos 30^\circ \times 20$

$$= 10 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 20$$

$$= 100\sqrt{3} \text{ (焦耳)}$$



3-2

●例題 2 向量內積基本運算(一)

(1) 設 $\vec{AB}$ 與 $\vec{AC}$ 兩向量的夾角為 60° ，且 $|\vec{AB}| = 20$ ， $|\vec{AC}| = 12$ ，試求 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ 之值。
（5 分）

(2) 如右圖，已知 $|\vec{a}| = 8$ ， $|\vec{b}| = 20$ ，試求 $\vec{a} \cdot \vec{b}$ 之值。（5 分）

解 (1) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = |\vec{AB}| |\vec{AC}| \cos 60^\circ$

$$= 20 \times 12 \times \frac{1}{2}$$

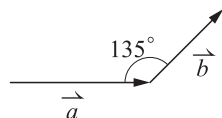
$$= 120$$

(2) 將 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的始點重合，可知 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 的夾角為 45°

故 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 8 \times 20 \times \cos 45^\circ$

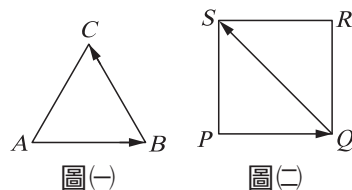
$$= 8 \times 20 \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= 80\sqrt{2}$$



● 例題 3 向量內積基本運算(二)

- (1) 如圖(一)，正三角形 ABC 邊長為 12，試求 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$ 之值。
(5 分)
- (2) 如圖(二)，正方形 $PQRS$ 邊長為 16，試求 $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QS}$ 之值。
(5 分)



解 (1) 將 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ 的始點重合，可知 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ 的夾角為 120°

$$\text{故 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 12 \times 12 \times \cos 120^\circ = 12 \times 12 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -72$$

(2) $\overrightarrow{PQ}$ 與 $\overrightarrow{QS}$ 的夾角為 135° ，且 $|\overrightarrow{QS}| = \sqrt{16^2 + 16^2} = 16\sqrt{2}$

$$\text{故 } \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{QS} = 16 \times 16\sqrt{2} \times \cos 135^\circ = 16 \times 16\sqrt{2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -256$$

● 例題 4 向量的內積與夾角

已知坐標平面上三點 $A(-2, 1)$, $B(3, 4)$, $C(-4, 5)$ ，試求：

- (1) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ 之值。(5 分)
- (2) $\cos \angle BAC$ 。(5 分)

解 (1) $\overrightarrow{AB} = (5, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 4)$

$$\text{故 } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times (-2) + 3 \times 4 = 2$$

$$(2) \cos \angle BAC = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{2}{\sqrt{34}\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{170}}{170}$$



● 例題 5 由向量夾角求分量

設 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (2, k)$, 若 $\vec{a}$ 與 $\vec{b}$ 夾角為 45° , 試求 k 值。(10 分)

解 由題意知, $\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \cos 45^\circ$, 即 $\frac{6+k}{\sqrt{9+1}\sqrt{4+k^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

兩邊平方 $\frac{k^2 + 12k + 36}{10(k^2 + 4)} = \frac{2}{4}$, 整理得 $k^2 - 3k - 4 = 0$

$\Rightarrow (k+1)(k-4) = 0$, 解得 $k = -1$ 或 4



3-2

● 例題 6 兩向量垂直的判定法則

(1) 已知向量 $\vec{a} = (5, 3)$, $\vec{b} = (3, -5)$, 試判斷 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 是否垂直。(5 分)

(2) 已知 A 點坐標 $(6, 5)$, B 點坐標 $(2, 4)$, C 點在 x 軸上, 且 $\overline{BA}$ 垂直 $\overline{BC}$, 試求 C 點坐標。(5 分)

解 (1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 5 \times 3 + 3 \times (-5) = 0$, 故 $\vec{a} \perp \vec{b}$

(2) 設 C 點坐標為 $(x, 0)$, 則 $\overrightarrow{BA} = (4, 1)$, $\overrightarrow{BC} = (x-2, -4)$

$\because \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC} \quad \therefore \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$

則 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 4(x-2) - 4 = 0 \Rightarrow 4x - 12 = 0 \Rightarrow x = 3$

故 C 點坐標為 $(3, 0)$

● 例題 7 內積性質的應用 ($|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$)

已知 $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 4$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夾角為 60° , 試求 $|2\vec{a} + 3\vec{b}|$ 。(10 分)

解 $\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 \times 4 \times \cos 60^\circ = 6 \times 4 \times \frac{1}{2} = 12$

$$\begin{aligned} |2\vec{a} + 3\vec{b}|^2 &= (2\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (2\vec{a} + 3\vec{b}) \\ &= 4|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 9|\vec{b}|^2 \\ &= 4 \times 6^2 + 12 \times 12 + 9 \times 4^2 = 432 \end{aligned}$$

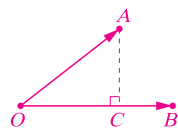
故 $|2\vec{a} + 3\vec{b}| = \sqrt{432} = 12\sqrt{3}$

● 例題 8 向量正射影的應用

- (1) 已知平面上有三點 $O(0, 0)$, $A(2, 9)$, $B(5, 10)$, 試求 A 點在 $\overrightarrow{OB}$ 上的正射影點 C 的坐標。(5 分)
- (2) 已知平面上有兩向量 $\overrightarrow{AB} = (1, 5)$, $\overrightarrow{AC} = (6, 4)$, 試將 $\overrightarrow{AB}$ 分解為與 $\overrightarrow{AC}$ 平行的向量 $\vec{a}$ 及與 $\overrightarrow{AC}$ 垂直的向量 $\vec{b}$ 。(5 分)

解 (1) $\overrightarrow{OA} = (2, 9)$, $\overrightarrow{OB} = (5, 10)$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OA} \text{ 在 } \overrightarrow{OB} \text{ 上的正射影 } \overrightarrow{OC} &= \left(\frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2} \right) \overrightarrow{OB} = \frac{2 \times 5 + 9 \times 10}{5^2 + 10^2} (5, 10) \\ &= \frac{100}{125} (5, 10) = (4, 8) \end{aligned}$$



因此正射影點 C 的坐標為 $(4, 8)$

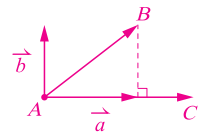
- (2) 作示意圖如右

① $\vec{a}$ 即為 $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影

$$\text{故 } \vec{a} = \left(\frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2} \right) \overrightarrow{AC} = \frac{1 \times 6 + 5 \times 4}{6^2 + 4^2} (6, 4) = \frac{26}{52} (6, 4) = (3, 2)$$

② $\because \vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{AB}$

$$\therefore \vec{b} = \overrightarrow{AB} - \vec{a} = (1, 5) - (3, 2) = (-2, 3)$$



例題 9 直線的法向量

- (1) 坐標平面上一直線方程式為 $3x - 2y + 1 = 0$ ，試寫出此直線的一個法向量。(5 分)
(2) 已知直線 L 的法向量為 $(3, 1)$ ，且過點 $(2, -3)$ ，試求直線 L 的方程式。(5 分)

解 (1) 取直線方程式中 x, y 項係數，故得法向量 $(3, -2)$

(2) 設直線 L 的方程式為 $3x + y - k = 0$

代入 $(2, -3)$ ，得 $3 \times 2 + (-3) - k = 0$ ，故 $k = 3$

可得直線 L 的方程式為 $3x + y - 3 = 0$



3-2

例題 10 向量夾角與直線的夾角

- (1) 已知平面上有 $A(5, -2)$ ， $B(3, 2)$ ， $C(-2, 1)$ 三點，試求 $\cos \angle ABC$ 。(5 分)
(2) 已知平面上兩直線 $L_1: x - 5y - 6 = 0$ ， $L_2: 3x - 2y - 5 = 0$ ，試求 L_1, L_2 的夾角。(5 分)

解 (1) $\overrightarrow{BA} = (2, -4)$ ， $\overrightarrow{BC} = (-5, -1)$

$$\begin{aligned}\text{故 } \cos \angle ABC &= \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{2 \times (-5) + (-4) \times (-1)}{\sqrt{2^2 + (-4)^2} \sqrt{(-5)^2 + (-1)^2}} \\ &= \frac{-6}{\sqrt{20} \sqrt{26}} = \frac{-3\sqrt{130}}{130}\end{aligned}$$

(2) 取 L_1, L_2 的法向量分別為 $\vec{n}_1 = (1, -5)$ 、 $\vec{n}_2 = (3, -2)$

設 $\vec{n}_1$ 與 $\vec{n}_2$ 的夾角為 θ ，則兩直線的夾角為 $\theta, 180^\circ - \theta$

$$\begin{aligned}\text{故 } L_1, L_2 \text{ 夾角的餘弦值 } \cos \theta &= \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1 \times 3 + (-5)(-2)}{\sqrt{1^2 + (-5)^2} \sqrt{3^2 + (-2)^2}} = \frac{13}{\sqrt{26} \sqrt{13}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$\theta = 45^\circ$ ，另一夾角為 $180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$

$\therefore L_1$ 與 L_2 的夾角為 $45^\circ, 135^\circ$