第 1 章 正弦函數與週期性現象

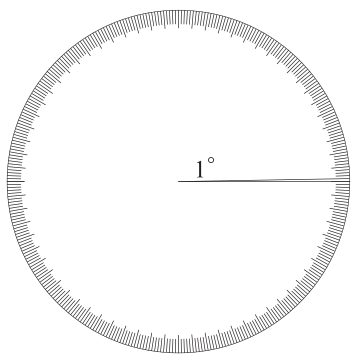
1–1 弧度量

重點整理

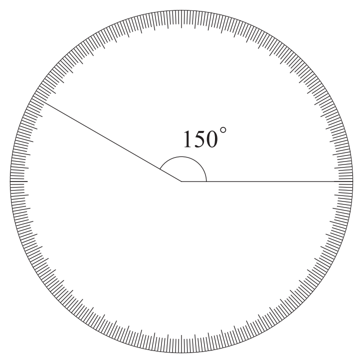
一、弧度量的定義

1. 度度量與弧度量：

(1) 度度量：將圓周分成 360 等分，每一等分所對應的圓心角稱為 1 度（degree，記為 1° ），如圖(一)。



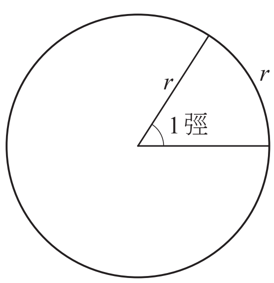
圖(一)



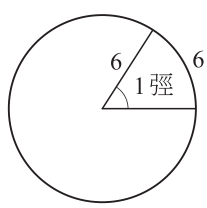
圖(二)

例：如圖(二)，將圓周分為 360 等分，則 150 個等分形成的弧所對應的圓心角為 150° 。

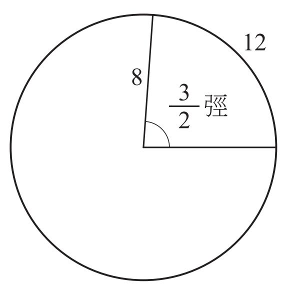
(2) 弧度量：圓周上，與半徑等長的弧所對應的圓心角稱為 1 弳（radian），又稱 1 弧度，如圖(三)。由定義可知，若圓半徑為 r，則長度為 s 的弧所對應的圓心角 θ 滿足 $\theta=\dfrac{s}{r}$ 弳。



圖(三)



圖(四)



圖(五)

例：如圖(四)，設一圓半徑為 6，則長度為 6 的弧所對應的圓心角 $\theta=1$ 弳。

例：如圖(五)，設一圓半徑為 8，則長度為 12 的弧所對應的圓心角

$$\theta=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}\text{ 弳。}$$

2. 度與弳的換算：

(1) $1^\circ=\dfrac{\pi}{180}$ 弳。

例：$30^\circ=30\times\dfrac{\pi}{180}$ 弳 $=\dfrac{\pi}{6}$ 弳，$-100^\circ=-100\times\dfrac{\pi}{180}$ 弳 $=-\dfrac{5\pi}{9}$ 弳。

(2) 1 弳 $=\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ$。

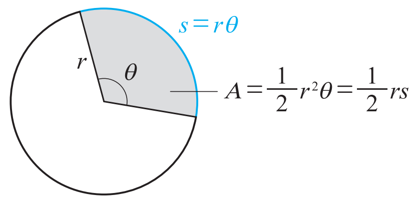
例：$\dfrac{2\pi}{3}$ 弳 $=\dfrac{2\pi}{3}\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ=120^\circ$，$3$ 弳 $=3\times\left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ=\left(\dfrac{540}{\pi}\right)^\circ$。

二、弧長與扇形面積

假設圓半徑為 r，扇形圓心角為 θ 弳，弧長為 s，則如圖(六)，此扇形的弧長與面積公式如下：

(1) 弧長 $s=r\theta$。

(2) 扇形面積 $A=\dfrac{1}{2}r^2\theta=\dfrac{1}{2}rs$。



圖(六)

例：一圓半徑 12，扇形圓心角 $\dfrac{\pi}{3}$ 弳，

則此扇形弧長 $s=12\times\dfrac{\pi}{3}=4\pi$，面積 $A=\dfrac{1}{2}\times12^2\times\dfrac{\pi}{3}=24\pi$。

例：一圓半徑 8，扇形圓心角 2 弳，則此扇形弧長 $s=8\times2=16$，

面積 $A=\dfrac{1}{2}\times8^2\times2=64$。

例：一圓半徑 6，扇形弧長 $s=12$，則此扇形面積 $A=\dfrac{1}{2}\times6\times12=36$。

1-1

例題 1　將度轉換為弳

將度度量換算成弧度量。

(1) 135°。(3 分)

(2) 420°。(3 分)

(3) -60°。(4 分)

解

(1) $135^\circ = 135 \times \dfrac{\pi}{180}$ 弳 $= \dfrac{3\pi}{4}$ 弳

(2) $420^\circ = 420 \times \dfrac{\pi}{180}$ 弳 $= \dfrac{7\pi}{3}$ 弳

(3) $-60^\circ = -60 \times \dfrac{\pi}{180}$ 弳 $= -\dfrac{\pi}{3}$ 弳

例題 2　將弳轉換為度

將弧度量換算成度度量。

(1) 4 弳。(3 分)

(2) $-\dfrac{3\pi}{4}$ 弳。(3 分)

(3) $\dfrac{7\pi}{5}$ 弳。(4 分)

解

(1) 4 弳 $= 4 \times \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ = \left(\dfrac{720}{\pi}\right)^\circ$

(2) $-\dfrac{3\pi}{4}$ 弳 $= -\dfrac{3\pi}{4} \times \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ = -135^\circ$

(3) $\dfrac{7\pi}{5}$ 弳 $= \dfrac{7\pi}{5} \times \left(\dfrac{180}{\pi}\right)^\circ = 252^\circ$

例題 3　弧度制的三角比

試求下列各題的三角比：

(1) $\sin\dfrac{\pi}{3}$。（3 分）

(2) $\tan\dfrac{\pi}{6}$。（3 分）

(3) $\cos\left(\dfrac{-7\pi}{4}\right)$。（4 分）

解

(1) $\because \dfrac{\pi}{3}$ 弳 $=60^\circ$　$\therefore \sin\dfrac{\pi}{3}=\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $\because \dfrac{\pi}{6}$ 弳 $=30^\circ$　$\therefore \tan\dfrac{\pi}{6}=\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(3) $\because \dfrac{-7\pi}{4}$ 弳 $=-315^\circ$　$\therefore \cos\left(\dfrac{-7\pi}{4}\right)=\cos(-315^\circ)=\cos 45^\circ=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

例題 4　扇形弧長與面積㈠（已知半徑與圓心角（度）求弧長、面積）

已知扇形的半徑為 24 公分，圓心角為 36°，求扇形的：

(1) 弧長。（5 分）

(2) 面積。（5 分）

解

$36^\circ=36\times\dfrac{\pi}{180}=\dfrac{\pi}{5}$

(1) 弧長 $s=24\times\dfrac{\pi}{5}$

$=\dfrac{24\pi}{5}$（公分）

(2) 面積 $A=\dfrac{1}{2}\times 24^2\times\dfrac{\pi}{5}$

$=\dfrac{288\pi}{5}$（平方公分）

例題 5　扇形弧長與面積㈡（已知半徑與弧長求圓心角、面積）

已知扇形的半徑為 6 公分，弧長 8 公分，求扇形的：

⑴ 圓心角（以弳表示）。（5 分）

⑵ 面積。（5 分）

解

⑴ 圓心角 $\theta = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$（弳）

⑵ 面積 $A = \frac{1}{2} \times 6 \times 8 = 24$（平方公分）

例題 6　扇形弧長與面積㈢（已知半徑與周長求圓心角、面積）

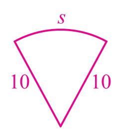
已知扇形半徑 10 公分，周長 30 公分，求扇形的：

⑴ 圓心角（以弳表示）。（5 分）

⑵ 面積。（5 分）

解 弧長 $s = 30 - 10 - 10$

$= 10$（公分）

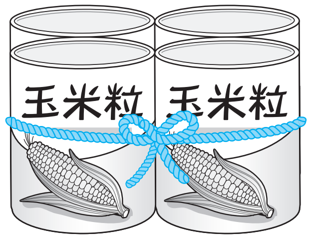


⑴ 圓心角 $\theta = \frac{10}{10} = 1$（弳）

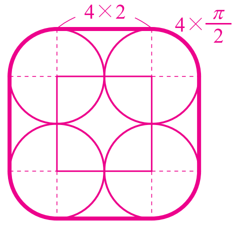
⑵ 面積 $A = \frac{1}{2} \times 10^2 \times 1 = 50$（平方公分）

例題 7　扇形弧長公式的應用(一)

將 4 個大小相同的圓罐綁在一起，已知圓罐半徑為 4 公分，若不計打結所需要的繩長，則繩長至少需要多少公分？（10 分）



解 如右圖，由這 4 個圓罐的截面圖可知



所需繩長為 $4\times2\times4+4\times\dfrac{\pi}{2}\times4$

$=32+8\pi\,(\approx 57.1)$（公分）

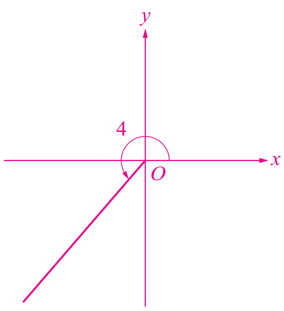
例題 8　弧度的定義

試判斷下列各弧度量位於第幾象限？$\left(\text{已知 }\dfrac{\pi}{2}\approx1.57，\pi\approx3.14，\dfrac{3\pi}{2}\approx4.71，2\pi\approx6.28\right)$

(1) 4 弳。（5 分）

(2) 10.5 弳。（5 分）

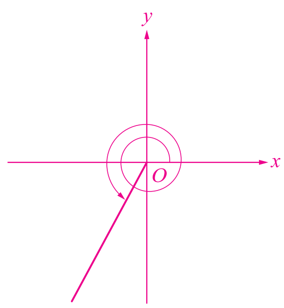
解 (1)



$\because\ \pi<4<\dfrac{3\pi}{2}$

$\therefore$ 4 弳位於第三象限

(2)



$\because\ 10.5=6.28+4.22\approx2\pi+4.22$

$\pi<4.22<\dfrac{3\pi}{2}$

$\therefore$ 10.5 弳位於第三象限

例題 9　扇形弧長公式的應用㈡

觀察一個時鐘，回答下列問題：

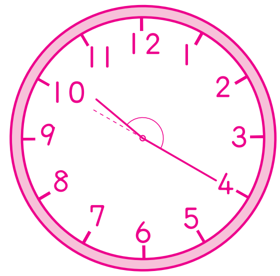
⑴ 10 點 20 分時，時針與分針所夾的較小角為多少弳？（5 分）

⑵ 假設分針長度為 12 公分，求分針的針尖從 8 點 15 分到 8 點 50 分，在鐘面上掃過的路徑長。（5 分）

解 ⑴ 如右圖，$360^\circ \div 12 = 30^\circ$

即鐘面上相鄰 2 數字夾角 30°

10 到 4 夾角 180°



但 10 點 20 分，時針從 10 往 11 走了 $30^\circ \times \dfrac{20}{60} = 10^\circ$

∴時針與分針所夾較小角為

$$180^\circ - 10^\circ = 170^\circ = 170 \times \frac{\pi}{180} = \frac{17\pi}{18}\text{（弳）}$$

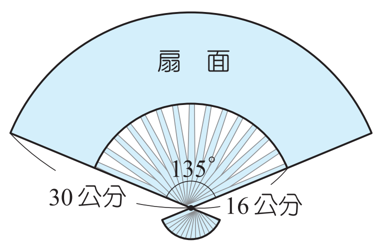
⑵ 8 點 15 分到 8 點 50 分，分針從鐘面上的 3 走到 10，夾角為

$$30^\circ \times (10-3) = 210^\circ = 210 \times \frac{\pi}{180} = \frac{7\pi}{6}$$

∴路徑長為 $12 \times \dfrac{7\pi}{6} = 14\pi$（公分）

例題 10　扇形面積公式的應用

如右圖，此摺扇完全打開時，圓心角為 135°，試求扇面的面積。（10 分）



解 $135^\circ = 135 \times \dfrac{\pi}{180} = \dfrac{3\pi}{4}$

∴扇面面積為

$$\frac{1}{2} \times 30^2 \times \frac{3\pi}{4} - \frac{1}{2} \times 16^2 \times \frac{3\pi}{4} = \frac{483\pi}{2}\ (\approx 758.69)\text{（平方公分）}$$