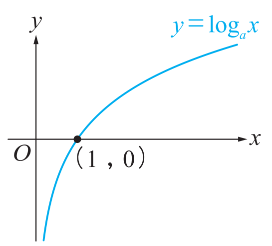
2-3 對數函數及其圖形

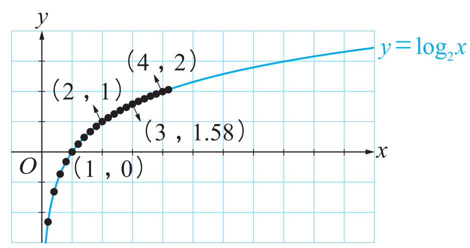
重點整理

一、對數函數的圖形與特徵

1. 對數函數的定義：
   設 $a>0$，$a\neq 1$，且 x 是任意正實數，則函數 $f(x)=\log_a x$ 稱為「以 a 為底數的對數函數」，其中定義域為所有正實數，值域為所有實數。
   例：$f(x)=\log_3 x$ 是以 3 為底數的對數函數。
   例：$f(x)=\log_{\frac{1}{2}} x$ 是以 $\frac{1}{2}$ 為底數的對數函數。
   例：$f(x)=\log_{10} x=\log x$ 是常用對數函數。
2. 對數函數圖形的特徵：
   在坐標平面上，以 $(x,\log_a x)$ 為點坐標，可以描繪出對數函數 $y=\log_a x$ 的圖形。
   ▨ 對數函數 $f(x)=\log_a x\,(a>1)$ 的圖形特徵：
   圖形永遠在 y 軸右側，且通過點 $(1,0)$，由左而右逐漸上升，上升幅度愈來愈小，當 x 值愈接近 0，函數值愈小，圖形愈接近 y 軸，且圖形凹口向下，如圖(一)。



圖(一)

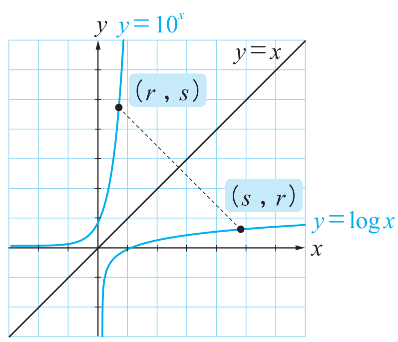


圖(二)

例：$y=f(x)=\log_2 x$ 圖形由左而右逐漸上升，如圖(二)。

二、指數函數與對數函數圖形的關係

1. 設平面上兩圖形有如以下的關係，點 (r,s) 在一圖形上時，點 (s,r) 必在另一圖形上，則兩圖形對於直線 $y=x$ 對稱。
2. 函數 $y=10^x$ 和 $y=\log x$ 的圖形對稱於直線 $y=x$。

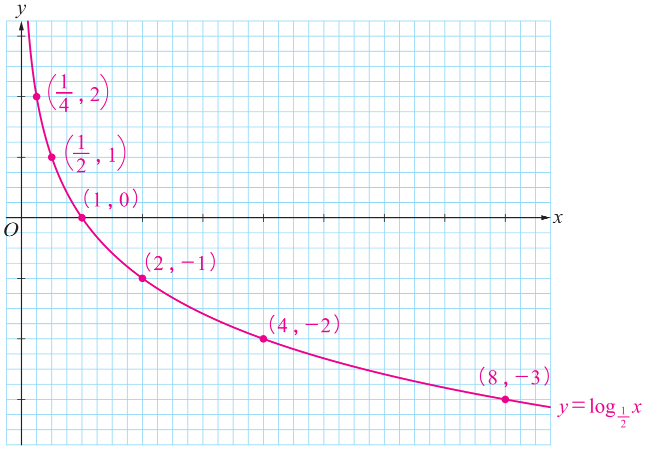


例題 1　對數函數的圖形(一)

已知 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$，試完成下表，並利用此表描繪 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的圖形。（10 分）

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_{\frac{1}{2}}x$						

解



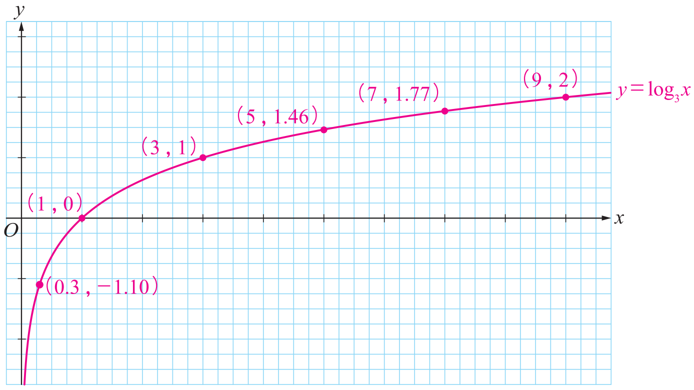
x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$y=\log_{\frac{1}{2}}x$	2	1	0	-1	-2	-3

例題 2　對數函數的圖形(二)

試利用下表的數據及描點法，描繪對數函數 $y=\log_3 x$ 的圖形。（10 分）

x	0.3	1	3	5	7	9
$y=\log_3 x$	-1.10	0	1	1.46	1.77	2

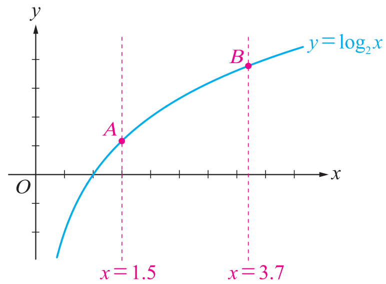
解



例題 3　利用對數函數圖形比較對數的大小

試利用對數函數 $y=\log_2 x$ 的圖形，比較 $\log_2 1.5$，$\log_2 3.7$ 兩數的大小關係。（10 分）

解



在圖形的 x 軸標記 $x=1.5$ 與 3.7 的點

在此兩點分別作 y 軸的平行線，交圖形於 A、B 兩點

$\because$ 圖形由左而右逐漸上升

$\therefore\ \log_2 1.5<\log_2 3.7$

例題 4　對數的應用

某投資機構每日固定將獲利提撥 10000 元給所有成員平分。假設第一天只有一名成員，之後每日增加 1 人，因此第二天開始，每個人能夠分得的獲利就是 10000 元的 $\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，……。

已知小倫從第一天開始就是成員，試利用 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n}\approx\frac{\log n}{0.4343}+0.5772$ 估算：

(1) 小倫從第 1 天到第 10 天總共分得多少元？（四捨五入至整數位）（5 分）

(2) 如果小倫一開始就設定至少要分得獲利 50000 元，則他至少需要幾天？（已知 $10^{0.92}\approx 8.3176$）（5 分）

解 (1) 依題意，小倫 10 天總共分得

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{10}\approx\frac{\log 10}{0.4343}+0.5772$$

$$=\frac{1}{0.4343}+0.5772$$

$$\approx 2.30256+0.5772=2.87976（萬元）\approx 28798（元）$$

(2) 設所求為 m 天，則

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{m}\approx\frac{\log m}{0.4343}+0.5772\geq 5\Rightarrow\frac{\log m}{0.4343}\geq 5-0.5772=4.4228$$

$$\Rightarrow \log m\geq 4.4228\times 0.4343=1.92082204$$

$$\Rightarrow m\geq 10^{1.92082204}>10^{1.92}=10^{1}\times 10^{0.92}\approx 10\times 8.3176=83.176$$，故至少需要 84 天

例題 5　對數方程式

試解下列方程式：

(1) $\log(3x-7)=1-\log 5$。（5 分）

(2) $\log(x+1)+\log(3x+2)=1+\log 3$。（5 分）

解 (1) 首先要讓每一個對數都有意義，先決條件是 $3x-7>0$，即 $x>\dfrac{7}{3}$

接著化簡原方程式得 $\log(3x-7)=\log 2$，故 $3x-7=2$

解得 $x=3$，滿足先決條件 $x>\dfrac{7}{3}$，故 $x=3$

(2) 首先要讓每一個對數都有意義

先決條件是 $x+1>0$ 且 $3x+2>0$，即 $x>-\dfrac{2}{3}$

接著化簡原方程式得 $\log(x+1)(3x+2)=\log 30$

故 $(x+1)(3x+2)=30$，展開整理得 $3x^2+5x-28=0$

分解得 $(x+4)(3x-7)=0$，得 $x=-4$ 或 $\dfrac{7}{3}$，但由先決條件 $x>-\dfrac{2}{3}$，故 $x=\dfrac{7}{3}$

例題 6　對數不等式（利用對數函數圖形的特徵）

試解下列不等式：

(1) $\log 2x>2$。（5 分）

(2) $\log(x-1)+\log(x+2)<\log(3x+1)$。（5 分）

解 (1) 首先，真數必須大於 0

先決條件是 $2x>0$，即 $x>0$

其次，由常用對數的定義，原不等式可化為 $\log 2x>\log 10^2$

$\because$ 常用對數的圖形由左而右逐漸上升

$\therefore 2x>10^2$，即 $2x>100$

故得 $x>50$（滿足先決條件）

(2) 首先，真數必須大於 0

即 $x-1>0$，$x+2>0$，$3x+1>0$，故先決條件是 $x>1$

其次，利用常用對數的性質，原不等式可化為 $\log(x-1)(x+2)<\log(3x+1)$

$\because$ 常用對數的圖形由左而右逐漸上升

$\therefore (x-1)(x+2)<3x+1$，展開整理得 $x^2-2x-3<0$

分解得 $(x+1)(x-3)<0$，故 $-1<x<3$

但須滿足先決條件，因此得 $1<x<3$

例題 7　對數與斜率的綜合應用

已知坐標平面上 $A(2,\log 2)$，$B(4,\log 4)$，$C(8,\log k)$ 三點共線，試求 k 值。（10 分）

解 $\because A$，B，C 三點共線　$\therefore$ 直線 AB 的斜率 = 直線 AC 的斜率

$$\Rightarrow \frac{\log 4-\log 2}{4-2}=\frac{\log k-\log 2}{8-2}\text{，即 }\frac{\log 4-\log 2}{2}=\frac{\log k-\log 2}{6}$$

整理得 $3\log 4-3\log 2=\log k-\log 2$

移項可得 $\log k=3\log 4-2\log 2=\log\dfrac{4^3}{2^2}=\log 16$

故得 $k=16$

例題 8　對數函數圖形的應用(一)

在坐標平面上作函數 $y=\log_2 x$ 的圖形：

(1) 若點 $A(8,a)$，$B(32,b)$ 都在此函數圖形上，試求數對 (a,b)。（5 分）

(2) 若點 $P(5,p)$，$Q(20,q)$ 也在此函數圖形上，試求 $q-p$ 之值。（5 分）

解 (1) $\because A(8,a)$，$B(32,b)$ 都在 $y=\log_2 x$ 的圖形上

$\therefore a=\log_2 8=3$，$b=\log_2 32=5$

故得數對 $(a,b)=(3,5)$

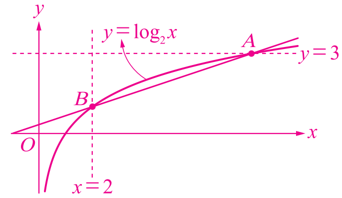
(2) $\because P(5,p)$，$Q(20,q)$ 在 $y=\log_2 x$ 的圖形上

$\therefore p=\log_2 5$，$q=\log_2 20$

故得 $q-p=\log_2 20-\log_2 5=\log_2\dfrac{20}{5}=\log_2 4=\dfrac{\log 2^2}{\log 2}=2$

例題 9　對數函數圖形的應用(二)

在坐標平面上，對數函數 $y=\log_2 x$ 的圖形與直線 $y=3$、$x=2$ 分別交於 A、B 兩點，試求直線 AB 的方程式。（10 分）



解　如右圖，設兩點坐標為 $A(a，3)$，$B(2，b)$

$\because$ A，B 兩點在 $y=\log_2 x$ 的圖形上

$\therefore$ $3=\log_2 a$，$b=\log_2 2$

解得 $a=2^3=8$，$b=1$，故得 $A(8，3)$，$B(2，1)$

直線 AB 的斜率為 $m_{AB}=\dfrac{1-3}{2-8}=\dfrac{1}{3}$

直線 AB 的方程式為 $y-1=\dfrac{1}{3}(x-2)$，整理可得 $x-3y+1=0$

例題 10　用對數解指數不等式的應用問題

某種細菌每過 1 天數量會增加為原來的 3 倍，已知原有這種細菌 500 隻，試問：幾天之後，數量會超過 5×10^8 隻？（取至整數位）（10 分）

（已知 $\log 2\approx0.3010$，$\log 3\approx0.4771$，$\log 7\approx0.8451$）

解　由題意得，經過 x 天以後，細菌數增加為 500×3^x 隻

則 $500\times3^x>5\times10^8$，即 $3^x>1\times10^6$

兩邊取對數可得 $\log 3^x>\log 10^6$

$\Rightarrow x\log 3>6 \Rightarrow x>\dfrac{6}{\log 3}\approx\dfrac{6}{0.4771}=12.57\cdots\cdots$

故 13 天之後，數量會超過 5×10^8 隻