

3-1 平面向量的表示法

重點整理

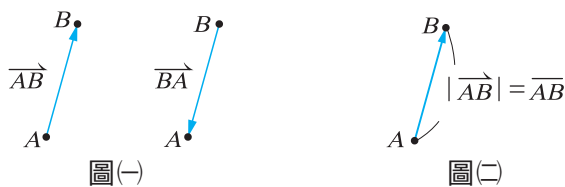
一、向量的幾何表示法

1. 向量的幾何表示：

(1) 有向線段：

帶有方向的線段。

例： \overrightarrow{AB} 是從 A 點到 B 點的有向線段， A 為始點， B 為終點。 \overrightarrow{BA} 是從 B 點到 A 點的有向線段， B 為始點， A 為終點，如圖(一)。



圖(一)

圖(二)

(2) 向量：

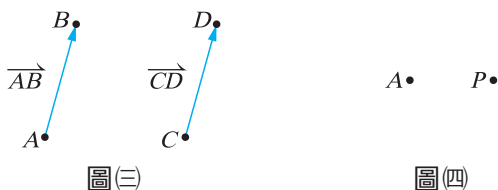
同時具有大小與方向的量，稱為向量，通常用有向線段表示。

例： \overrightarrow{AB} 是從 A 點到 B 點的有向線段， A 為始點， B 為終點， \overrightarrow{AB} 的長度以 $|\overrightarrow{AB}|$ 表示， $|\overrightarrow{AB}| = \overline{AB}$ ，如圖(二)。

(3) 向量的相等：

兩個大小(長度)相等、方向相同的有向線段，稱為相等的向量。

例： $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ ，如圖(三)。



圖(三)

圖(四)

(4) 零向量：

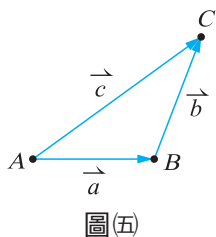
始點與終點重合的向量，記為 $\vec{0}$ ，大小為 0，方向為任意方向。

例： $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$ ， $\overrightarrow{PP} = \vec{0}$ ，如圖(四)。

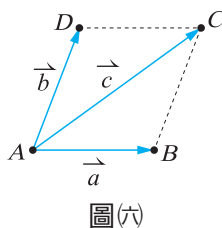
2. 向量的加法：

(1) 三角形法： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ ， $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ，如圖(五)。

(2) 平行四邊形法： $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ ， $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ ，如圖(六)。



圖(五)

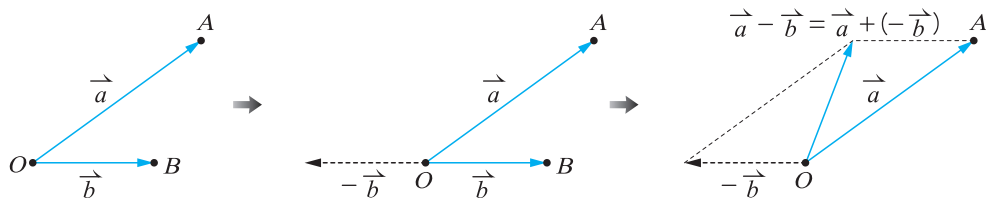


圖(六)



3. 向量的減法：

因為 $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ ，所以我們用加法來定義向量的減法。若 $\vec{OA} = \vec{a}$ ， $\vec{OB} = \vec{b}$ ，則 \vec{BO} 稱為 $-\vec{b}$ ，所以 $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$ ，如下圖。



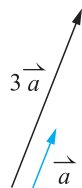
4. 向量的係數積：

(1) 實數 r 與向量 \vec{a} 的乘積，稱為向量 \vec{a} 的係數積，記為 $r\vec{a}$ 。

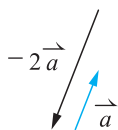
① 若 $\vec{a} \neq \vec{0}$ ，則下列性質成立：

- ❶ $r > 0$ 時， $r\vec{a}$ 的方向與 \vec{a} 相同，大小為 $r|\vec{a}|$ 。
- ❷ $r < 0$ 時， $r\vec{a}$ 的方向與 \vec{a} 相反，大小為 $|r||\vec{a}|$ 。
- ❸ $r = 0$ 時， $r\vec{a} = \vec{0}$ 。

例： $r = 3$ ，如圖(七)， $r = -2$ ，如圖(八)。



圖(七)



圖(八)

② 若 $\vec{a} = \vec{0}$ ，則 $r\vec{a} = \vec{0}$ 。

(2) 向量係數積的基本性質：

① $r(\vec{a} + \vec{b}) = r\vec{a} + r\vec{b}$ 。

例： $r = 2$ ， $\vec{a} = (2, 3)$ ， $\vec{b} = (1, 4)$ ，則：

(1) $r(\vec{a} + \vec{b}) = 2(3, 7) = (6, 14)$ 。

(2) $r\vec{a} + r\vec{b} = 2(2, 3) + 2(1, 4) = (4, 6) + (2, 8) = (6, 14)$ 。

② $(r + s)\vec{a} = r\vec{a} + s\vec{a}$ 。

例： $r = 2$ ， $s = -3$ ， $\vec{a} = (2, 3)$ ，則：

(1) $(r + s)\vec{a} = (2 - 3)(2, 3) = (-2, -3)$ 。

(2) $r\vec{a} + s\vec{a} = 2(2, 3) - 3(2, 3) = (4, 6) - (6, 9) = (-2, -3)$ 。

③ $r(s\vec{a}) = (rs)\vec{a}$ 。

例： $r = 2$ ， $s = -3$ ， $\vec{a} = (2, 3)$ ，則：

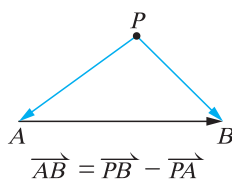
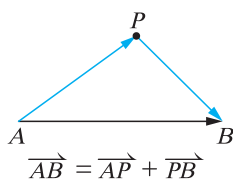
(1) $r(s\vec{a}) = 2(-3(2, 3)) = 2(-6, -9) = (-12, -18)$ 。

(2) $(rs)\vec{a} = (2 \times (-3))(2, 3) = -6(2, 3) = (-12, -18)$ 。

5. 向量的分解與組合：

(1) 向量的分解：

已知向量 \vec{AB} 及一點 P ，則 \vec{AB} 可以分解為相加或相減的兩個向量，如下圖。



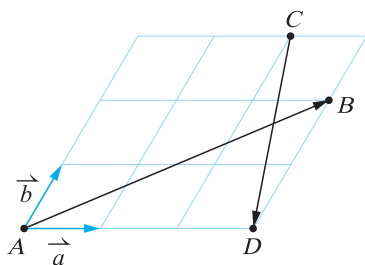
3-1

翰林用心
教師用
精益求精

(2) 向量的組合：

利用向量的加減法與係數積，可以將向量寫成其他向量的組合。

例： $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ ， $\overrightarrow{CD} = \vec{a} - 3\vec{b}$ ，如下圖。



二、向量的坐標表示法

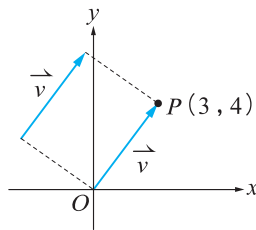
1. 向量的坐標表示：

(1) 將坐標平面上任意一個向量 \vec{v} 的始點置於原點，設終點坐標為 $P(x, y)$ ，則

\vec{v} 的坐標表示為 $\vec{v} = (x, y)$ 或 $\vec{v} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ， \overrightarrow{OP} 稱為 \vec{v} 的位置向量， \vec{v} 的長度

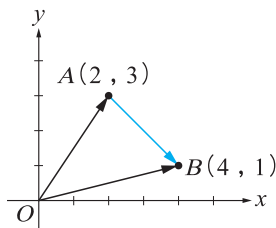
$$|\vec{v}| = \sqrt{x^2 + y^2}。$$

例：如下圖， \vec{v} 的坐標表示為 $\vec{v} = (3, 4)$ ，長度為 $|\vec{v}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ 。



(2) 坐標平面上原點 $O(0, 0)$ 及點 $A(a_1, a_2)$ 、 $B(b_1, b_2)$ ，則 $\overrightarrow{OA} = (a_1, a_2)$ ， $\overrightarrow{OB} = (b_1, b_2)$ ， $\overrightarrow{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ 。

例：如下圖， $\overrightarrow{OA} = (2, 3)$ ， $\overrightarrow{OB} = (4, 1)$ ， $\overrightarrow{AB} = (4 - 2, 1 - 3) = (2, -2)$ 。



2. 向量的加減法：

設 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ，則 $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ ，

$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$ 。

例：向量 $\vec{a} = (5, 3)$ ， $\vec{b} = (2, 1)$ ，則 $\vec{a} + \vec{b} = (5 + 2, 3 + 1) = (7, 4)$ ，

$\vec{a} - \vec{b} = (5 - 2, 3 - 1) = (3, 2)$ 。

3. 向量的係數積：

設 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ， r 為實數，則 $r\vec{a} = (ra_1, ra_2)$ 。

例：向量 $\vec{a} = (3, 2)$ ， $r = 2$ ，則 $r\vec{a} = 2(3, 2) = (6, 4)$ 。

4. 兩向量平行的判定法則：

設 $\vec{a} = (a_1, a_2)$ ， $\vec{b} = (b_1, b_2)$ 是平面上的兩個非零向量，若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$ ，則存在實數 r ，使得 $\vec{b} = r\vec{a}$ ，反之亦然。

例：向量 $\vec{a} = (1, 2)$ ， $\vec{b} = (3, 6)$ ，因為 $\vec{b} = 3\vec{a}$ ，所以 $\vec{b} \parallel \vec{a}$ 。





三、向量的線性組合

若 \vec{OA} 與 \vec{OB} 為平面上兩個不平行的非零向量，則平面上任意一個向量 \vec{OP} 必能唯一表成 $\vec{OP} = x\vec{OA} + y\vec{OB}$ 的形式，其中 x, y 為實數。這個表示法稱為將 \vec{OP} 寫成 \vec{OA} 與 \vec{OB} 的線性組合。

例：設 $\vec{OA} = (1, 0)$ ， $\vec{OB} = (0, 1)$ ，將向量 $\vec{OP} = (4, 1)$ 寫成 \vec{OA} 與 \vec{OB} 的線性組合，可得 $(4, 1) = 4(1, 0) + (0, 1)$ ，即 $\vec{OP} = 4\vec{OA} + \vec{OB}$ 。

例：設 $\vec{a} = (3, 2)$ ， $\vec{b} = (1, -1)$ ， $\vec{c} = (9, 1)$ 。將 \vec{c} 寫成 \vec{a} 與 \vec{b} 的線性組合，可得 $(9, 1) = 2(3, 2) + 3(1, -1)$ ，即 $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ 。（詳細解法請參考本節例題）

四、分點公式

已知坐標平面上有 $A(a_1, a_2)$ ， $B(b_1, b_2)$ 兩點，設 P 點是線段 AB 上的一點，且滿足 $\overline{PA} : \overline{PB} = m : n$ ，則對平面上任一點 O ， $\vec{OP} = \frac{n}{m+n}\vec{OA} + \frac{m}{m+n}\vec{OB}$ 。

特別地，當 O 為原點 $(0, 0)$ 時， $\vec{OP} = \left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n} \right)$ ， P 點的坐標就是

$\left(\frac{na_1 + mb_1}{m+n}, \frac{na_2 + mb_2}{m+n} \right)$ 。

證：設 A 點坐標 $(-3, 2)$ ， B 點坐標 $(2, 12)$ ， P 點為線段 AB 上的一點，且

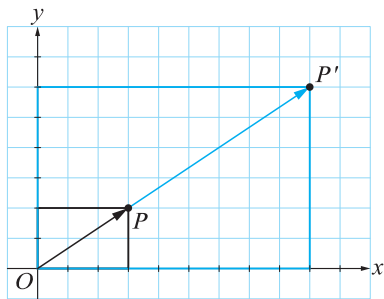
$$\overline{PA} : \overline{PB} = 3 : 2, \text{ 則 } P \text{ 點坐標為 } \left(\frac{2 \times (-3) + 3 \times 2}{3+2}, \frac{2 \times 2 + 3 \times 12}{3+2} \right) = (0, 8)。$$

五、向量在平面設計上的應用

1. 利用向量的係數積作圖片的伸縮：

將圖片的點 P 以 $\vec{OP}' = r\vec{OP}$ 變換到點 P' ，即可放大或縮小圖片，面積變為 r^2 倍。

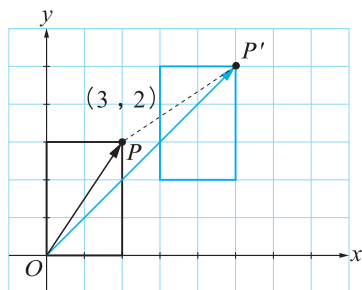
例：如下圖，將長方形的點 P 以 $\vec{OP}' = 3\vec{OP}$ 變換到點 P' ，則長方形的長與寬都放大為 3 倍，面積變為 9 倍。



2. 利用向量的加減法作圖形的平移：

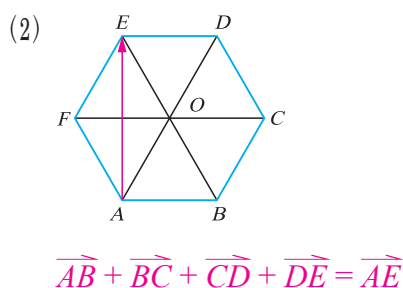
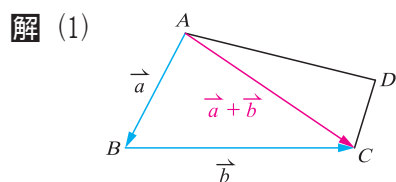
將圖片的點 P 以 $\vec{OP}' = \vec{OP} + (a, b)$ 變換到點 P' ，即可將圖片平移到目標位置。

例：如下圖，將長方形的點 P 以 $\vec{OP}' = \vec{OP} + (3, 2)$ 變換到點 P' ，則長方形圖形沿水平方向向右平移 3 單位，沿鉛直方向向上平移 2 單位。



例題 1 向量加法的圖示

- (1) 如圖所示， $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ ， $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$ ，試在圖上標示出 $\vec{a} + \vec{b}$ 。(5分)
- (2) 如圖所示，試在正六邊形 $ABCDEF$ 的圖上標示出 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$ 。(5分)



例題 2 正多邊形邊上向量的化簡與線性組合

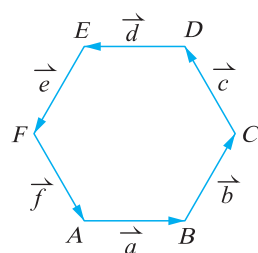
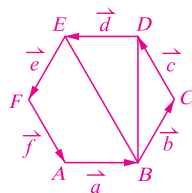
如右圖，正六邊形 $ABCDEF$ 各邊依逆時針方向定義向量 \vec{a} 、 \vec{b} 、 \vec{c} 、 \vec{d} 、 \vec{e} 、 \vec{f} ，則：

- (1) 試化簡 $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d}$ 為單一向量。(5分)
- (2) 試將 \overrightarrow{DB} 以 \vec{d} 、 \vec{e} 、 \vec{f} 表示。(其答案不唯一)(5分)

解 (1) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{a}) = \vec{b}$

(2) 如右圖

$$\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{DE} + 2\overrightarrow{FA} = \vec{d} + 2\vec{f}$$



例題 3 向量的線性組合(-)

如右圖，在 15 個相同平行四邊形拼成的圖形中，試問：

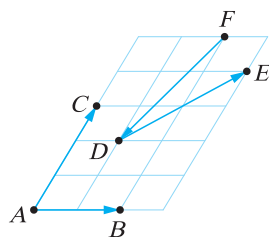
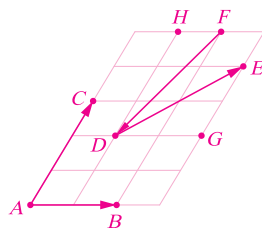
- (1) 若 $\overrightarrow{DE} = a\overrightarrow{AB} + b\overrightarrow{AC}$ ，試求 a ， b 的值。(5分)
- (2) 若 $\overrightarrow{FD} = r\overrightarrow{AB} + s\overrightarrow{AC}$ ，試求 r ， s 的值。(5分)

解 (1) $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GE} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow a = 1, b = \frac{2}{3}$$

(2) $\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FH} + \overrightarrow{HD} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow r = -\frac{1}{2}, s = -1$$



例題 4 向量的坐標表示

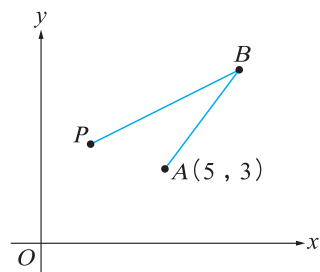
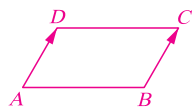
(1) 給定坐標平面上三點 $A(3, 5)$, $B(6, 2)$, $C(8, 3)$, 若四邊形 $ABCD$ 為平行四邊形, 試求 D 點坐標。(5分)

(2) 如右圖的坐標平面上, 已知 $A(5, 3)$, $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$, $\overrightarrow{PB} = (6, 3)$, 試求 P 點坐標。(5分)

解 (1) 設 D 點坐標為 (a, b) , 則 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$$\text{因此 } (a-3, b-5) = (2, 1)$$

$$\text{得 } a=5, b=6, \text{ 故 } D \text{ 點坐標為 } (5, 6)$$



(2) 設 P 點坐標為 (a, b) , 則 $\overrightarrow{AP} = (a-5, b-3)$

$$\text{又 } \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP} = (3, 4) + (-6, -3) = (-3, 1)$$

$$\Rightarrow (a-5, b-3) = (-3, 1), \text{ 解得 } a=2, b=4$$

$$\text{故得 } P \text{ 點坐標為 } (2, 4)$$

例題 5 兩向量平行的判定法則

已知坐標平面上向量 $\vec{a} = (2, 5)$, $\vec{b} = (x, -10)$, 則:

(1) 試求向量 \vec{c} , 使得 $\vec{c} \parallel \vec{a}$, \vec{c} 與 \vec{a} 同方向且長度為 \vec{a} 的 3 倍。(5分)

(2) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 試求 x 值。(5分)

解 (1) $\because \vec{c}$ 與 \vec{a} 同方向且長度為 \vec{a} 的 3 倍

$$\therefore \vec{c} = 3\vec{a} = 3(2, 5) = (6, 15)$$

(2) 若 $\vec{a} \parallel \vec{b}$, 則

$$\frac{2}{x} = \frac{5}{-10} \Rightarrow 5x = -20 \Rightarrow x = -4$$



3-1

例題 6 向量的線性組合(二)

已知坐標平面上向量 $\overrightarrow{OP} = (7, -5)$,

(1) 設 $\overrightarrow{OA} = (1, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (0, 1)$, 試將 \overrightarrow{OP} 寫為 \overrightarrow{OA} 與 \overrightarrow{OB} 的線性組合。(5分)

(2) 若 $\vec{a} = (2, -1)$, $\vec{b} = (-1, 2)$, 試將 \overrightarrow{OP} 寫為 \vec{a} 與 \vec{b} 的線性組合。(5分)

解 (1) 令 $\overrightarrow{OP} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$

$$\text{則 } (7, -5) = a(1, 0) + b(0, 1) = (a, b)$$

$$\Rightarrow a = 7, b = -5$$

$$\text{故 } \overrightarrow{OP} = 7\overrightarrow{OA} - 5\overrightarrow{OB}$$

(2) 令 $\overrightarrow{OP} = r\vec{a} + s\vec{b}$

$$\text{則 } (7, -5) = r(2, -1) + s(-1, 2) = (2r - s, -r + 2s)$$

$$\text{得 } \begin{cases} 2r - s = 7 & \cdots \cdots \cdots \text{①} \\ -r + 2s = -5 & \cdots \cdots \cdots \text{②} \end{cases}$$

$$\text{由 ①} \times 2 + \text{②} \text{ 得 } 3r = 9 \Rightarrow r = 3$$

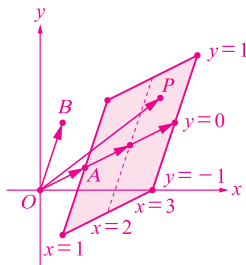
$$\text{代回 ① 得 } s = -1$$

$$\text{故 } \overrightarrow{OP} = 3\vec{a} - \vec{b}$$

例題 7 平面向量線性組合所形成的圖形

設平面坐標上原點 $O(0, 0)$, 向量 $\overrightarrow{OA} = (2, 1)$, $\overrightarrow{OB} = (1, 3)$, P 為平面上移動的點, 且 $\overrightarrow{OP} = x\overrightarrow{OA} + y\overrightarrow{OB}$, 其中 $1 \leq x \leq 3$, $-1 \leq y \leq 1$, x, y 為實數。試在平面上標示所有 P 點所形成的區域。(10分)

解



例題 8 分點公式

設點 $A(0, 4)$, $B(10, 9)$ 為平面上相異兩點, P 為線段 AB 上一點且滿足 $\overline{PA} : \overline{PB} = 2 : 3$, 試求 P 點坐標。(10分)

解 取 O 為原點, 得 $\overrightarrow{OA} = (0, 4)$, $\overrightarrow{OB} = (10, 9)$

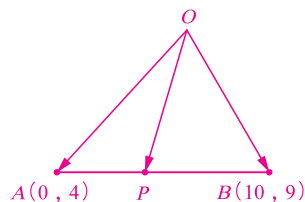
由分點公式

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{3+2} \overrightarrow{OA} + \frac{2}{3+2} \overrightarrow{OB}$$

$$= \frac{3}{5} (0, 4) + \frac{2}{5} (10, 9)$$

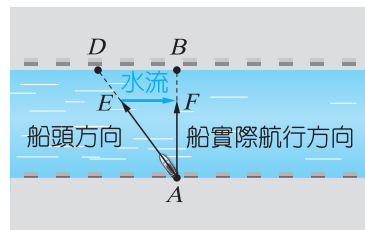
$$= \left(\frac{0+20}{5}, \frac{12+18}{5} \right) = (4, 6)$$

故 P 點坐標為 $(4, 6)$



例題 9 向量加減法與係數積的應用

如右圖，在寬 420 公尺，水流速度每秒 3 公尺的筆直河道中，從河岸 A 處將船朝對岸 D 處方向可開到正對岸 B 處，若船速每秒 6 公尺，試問：



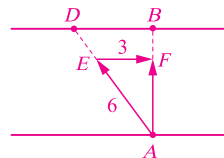
- (1) 船實際速度為每秒多少公尺？(5 分)
- (2) 船開到正對岸 B 處需要多少秒？(5 分)

解 作示意圖如右

\vec{EF} ：水流速度， \vec{AE} ：船朝 D 處的速度， \vec{AF} ：船實際速度
 $\vec{AE} + \vec{EF} = \vec{AF}$ ， $|\vec{AE}| = 6$ ， $|\vec{EF}| = 3$ ，故

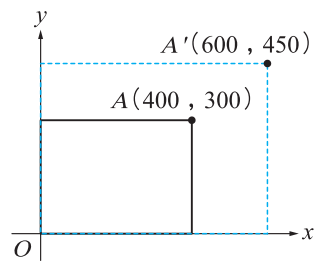
$$(1) |\vec{AF}| = \sqrt{6^2 - 3^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3} \text{ (公尺/秒)}$$

$$(2) \frac{420}{3\sqrt{3}} = \frac{140\sqrt{3}}{3} \text{ (秒)}$$



例題 10 用向量放大縮小圖片、平移圖片

如右圖，將長方形左下角頂點置於坐標系原點 $O(0, 0)$ ，右上頂點為 $A(400, 300)$ 。



- (1) 若將圖片的每一點 P 都以向量 $\vec{OP}' = r\vec{OP}$ 變換到點 P' ，已知點 A 變換為點 $A'(600, 450)$ ，試求：
 - ① r 值。(4 分)
 - ② 變換後的圖片面積是變換前的幾倍？(3 分)
- (2) 若將圖片的每一點 P 都以向量 $\vec{OP}' = \vec{OP} + (180, 120)$ 變換到點 P' ，試求點 A 變換後的坐標。(3 分)

解 (1) ① 由已知，令 $\vec{OA}' = r\vec{OA}$ ，則

$$(600, 450) = r(400, 300), \text{ 得 } r = \frac{3}{2}$$

$$\textcircled{2} \because r = \frac{3}{2}, \text{ 則 } r^2 = \frac{9}{4}, \text{ 故變換後的圖片面積是變換前的 } \frac{9}{4} \text{ 倍}$$

$$\begin{aligned} (2) \vec{OA}' &= \vec{OA} + (180, 120) \\ &= (400, 300) + (180, 120) \\ &= (580, 420) \end{aligned}$$

故變換後點 A 的坐標為 $(580, 420)$



3-1