1－2 空間坐標系

重點整理

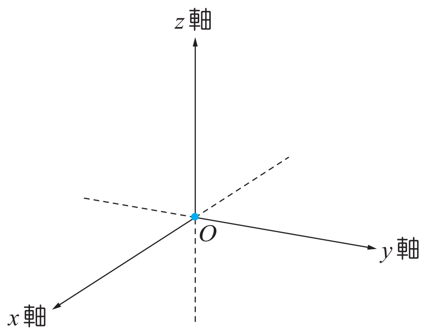
一、空間坐標系

1. 空間坐標系：

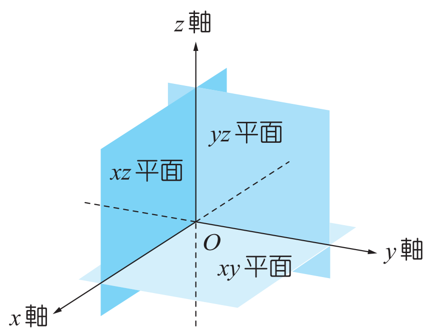
如圖(一)，空間中取一點 O 作為原點，通過原點 O 作三條兩兩互相垂直的直線，分別稱為 x 軸、y 軸、z 軸。

x 軸與 y 軸決定的平面稱為 xy 平面，y 軸與 z 軸決定的平面稱為 yz 平面，x 軸與 z 軸決定的平面稱為 xz 平面。此三平面兩兩互相垂直，把空間分隔成 8 個卦限，而所形成的坐標系就稱為**空間坐標系**。

特別地，由三個坐標軸的正向所圍成的卦限稱為**第一卦限**，如圖(二)。



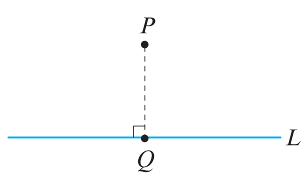
圖(一)



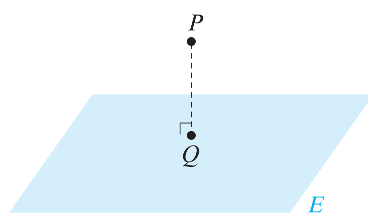
圖(二)

2. 投影點（正射影點）：

如圖(三)、圖(四)，在空間中，過 P 點作直線 L 或平面 E 的垂線，設垂足為 Q 點，則稱 Q 點為 P 點在直線 L 或平面 E 的**投影點（正射影點）**。



圖(三)



圖(四)

根據上述，我們將點 $P(a,b,c)$ 分別在三坐標軸及三坐標平面上的投影點之坐標整理如下表。

坐標軸	x 軸	y 軸	z 軸
P 點的投影點坐標	$(a,0,0)$	$(0,b,0)$	$(0,0,c)$

坐標平面	xy 平面	yz 平面	xz 平面
P 點的投影點坐標	$(a,b,0)$	$(0,b,c)$	$(a,0,c)$

3. 中點公式：

坐標空間中兩點 $P(x_1,y_1,z_1)$，$Q(x_2,y_2,z_2)$，則線段 PQ 的中點 M 的坐標為

$$\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2},\frac{z_1+z_2}{2}\right)。$$

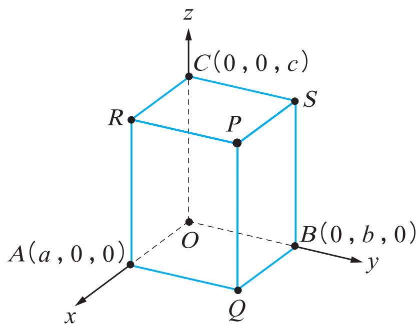
例：坐標空間中兩點 $P(4,5,7)$，$Q(-2,3,-1)$，則線段 PQ 的中點 M 的坐標為 $\left(\frac{4+(-2)}{2},\frac{5+3}{2},\frac{7+(-1)}{2}\right)=(1,4,3)$。

4. 空間中兩點的距離公式：

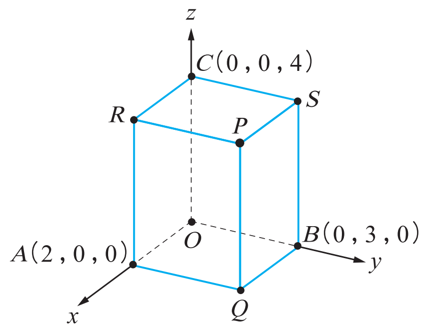
坐標空間中兩點 $P(x_1, y_1, z_1)$，$Q(x_2, y_2, z_2)$，則 P、Q 兩點的距離為
$\overline{PQ}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$。

例：坐標空間中兩點 $P(2, 3, 3)$，$Q(-1, 1, -3)$，則 P、Q 兩點的距離為
$\overline{PQ}=\sqrt{(2+1)^2+(3-1)^2+(3+3)^2}=\sqrt{49}=7$。

5. 設 $P(a, b, c)$ 為坐標空間中的一個點，則 P 點到坐標軸與坐標平面的距離，如下。



例：

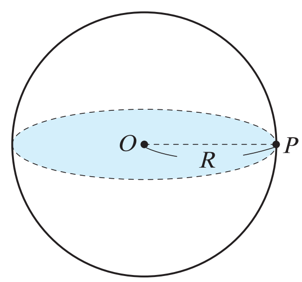


給定點坐標	$P(a, b, c)$	**例**：$P(2, 3, 4)$
P 點到 x 軸的距離	$\sqrt{b^2+c^2}$	$\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$
P 點到 y 軸的距離	$\sqrt{a^2+c^2}$	$\sqrt{2^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$
P 點到 z 軸的距離	$\sqrt{a^2+b^2}$	$\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$
P 點到 xy 平面的距離	$\lvert c\rvert$	$\lvert 4\rvert=4$
P 點到 yz 平面的距離	$\lvert a\rvert$	$\lvert 2\rvert=2$
P 點到 xz 平面的距離	$\lvert b\rvert$	$\lvert 3\rvert=3$

二、球面與平面的截痕及經緯線

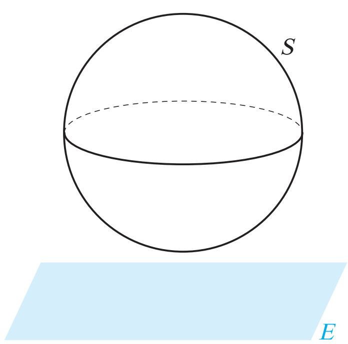
1. 球面與平面的關係：

空間中與一定點 O 距離為 R 的所有點 P 所形成的圖形稱為球面，如右圖所示，其中定點 O 稱為球心，R 稱為球半徑。

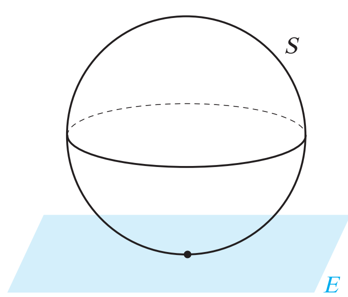


空間中平面 E 與球面 S 的相交情形有三種：

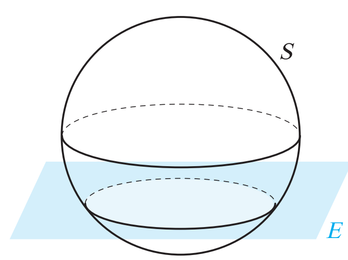
(1) 平面 E 與球面 S 不相交，如圖(五)。
(2) 平面 E 與球面 S 恰交於一點，如圖(六)。
(3) 平面 E 與球面 S 交於一圓，如圖(七)。



圖(五)



圖(六)



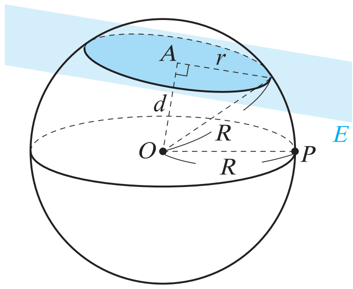
圖(七)

2. 截痕及經緯線：

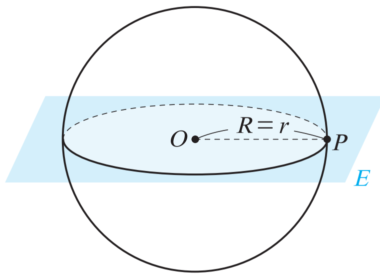
如圖(八)，平面 E 與球心 O 的垂直距離 d 小於球半徑 R 時，平面 E 與球面相交的部分是一個圓，其半徑為 $r=\sqrt{R^2-d^2}$。

小圓：平面 E 不通過球心 O 時，所截的圓稱為小圓。

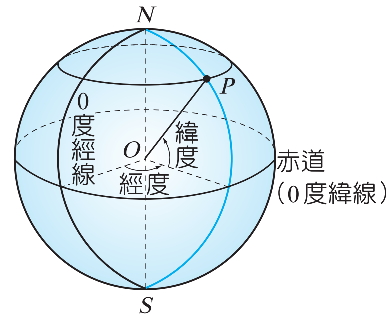
大圓：平面 E 通過球心 O 時，所截的圓稱為大圓，其半徑恰為球半徑 R，如圖(九)。



圖(八)



圖(九)



圖(十)

如圖(十)，O 為球心，S、N 分別為球面的南、北極。

(1) 經線(longitude line)：

沿地表連接 N 與 S 的大圓弧(半個大圓)，稱為經線。通過英國格林威治天文臺的經線為 0 度經線，其餘的區分為東經線與西經線，其度數就是該經線所在的半平面與 0 度經線的半平面所夾的兩面角的度數，取值為 0° 至 180°。

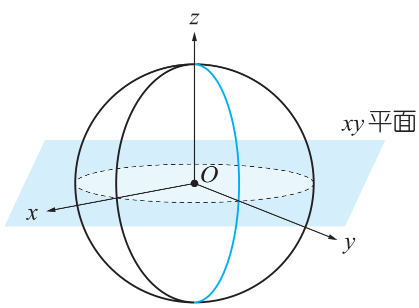
(2) 緯線(latitude line)：

垂直 $\overline{NS}$ 的平面與球面所相交的圓，稱為緯線。

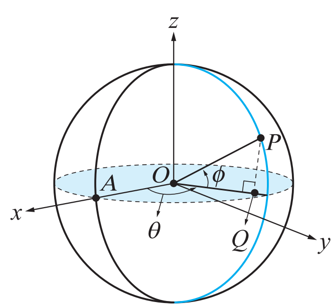
① 垂直 $\overline{NS}$ 的平面與球面所相交的圓當中，唯一的大圓，稱為赤道(equator)，也稱為 0 度緯線。

② 其餘的小圓區分為北緯線與南緯線，其度數就是經過此緯線上任一點的球半徑與赤道面所夾的度數。

3. 經緯度換算為空間坐標：



圖(十一)



圖(十二)

如圖(十一)，以球心 O 為空間坐標系的原點，赤道(0 度緯線)所在的平面為 xy 平面。x 軸正向在 0 度經線上，y 軸正向在東經 90 度上。

經度方面，東經為正，西經為負。緯度方面，北緯為正，南緯為負。

假設地球表面 P 點所在的經度為 θ，所在的緯度為 ϕ，如圖(十二)。

將球心 O 與 P 所連的 $\overline{OP}$ 在赤道面的投影稱為 $\overline{OQ}$，我們有 $\overline{OQ}=\overline{OP}\cos\phi$。

將 $\overline{OQ}$ 乘以 $\cos\theta$，即 $\overline{OQ}\cos\theta$，就是 P 點的 x 坐標。

將 $\overline{OQ}$ 乘以 $\sin\theta$，即 $\overline{OQ}\sin\theta$，就是 P 點的 y 坐標。

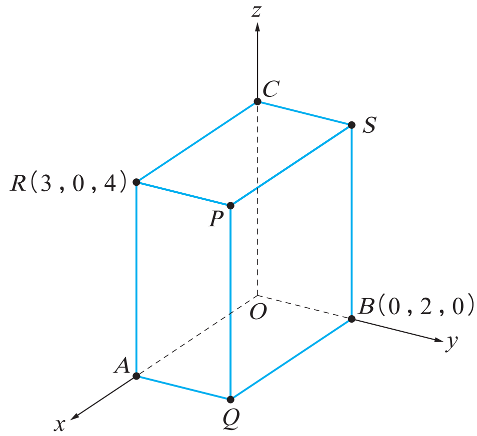
將 $\overline{OP}$ 乘以 $\sin\phi$，即 $\overline{OP}\sin\phi$，就是 P 點的 z 坐標。

例題 1　空間坐標系的點坐標(一)

右圖為坐標空間中的一個長方體，已知 $B(0,2,0)$，$R(3,0,4)$，試求：

(1) S 點坐標。（3 分）

(2) Q 點坐標。（2 分）



解 (1) $S(0,2,4)$

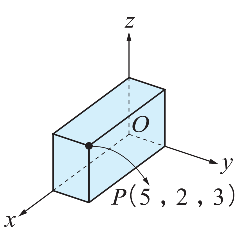
(2) $Q(3,2,0)$

例題 2　空間坐標系的點坐標(二)

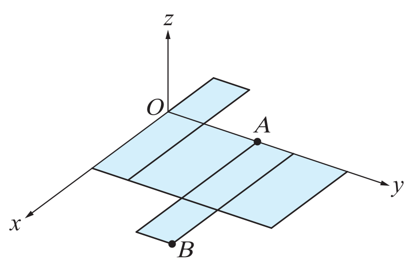
圖(一)是坐標空間中的長方體，圖(二)是長方體的展開圖。試求：

(1) A 點在圖(一)的坐標。（5 分）

(2) B 點在圖(一)的坐標。（5 分）



圖(一)



圖(二)

解 已知 P 點坐標為 $(5,2,3)$

故知長方體在 x 軸、y 軸、z 軸方向的長、寬、高分別為 5、2、3

(1) 觀察 A 點在三軸的移動量

在 x 軸方向移動量是 0

在 y 軸方向移動量是 2

在 z 軸方向移動量是 3

故知 A 點坐標為 $(0,2,3)$

(2) 同理，B 點在三軸的移動量分別是 5、0、0

故知 B 點坐標為 $(5,0,0)$

例題 3 空間中任一點到坐標軸與坐標平面的投影點與距離

已知坐標空間中一點 $P(3, 4, -3)$，試求 P 點在三個坐標軸與三個坐標平面的投影點坐標，以及 P 點到這些軸與平面的距離。（每格 2 分，本題共 20 分）

解

	投影點坐標	距離
x 軸	$(3, 0, 0)$	5
y 軸	$(0, 4, 0)$	$3\sqrt{2}$
z 軸	$(0, 0, -3)$	5
xy 平面	$(3, 4, 0)$	3
yz 平面	$(0, 4, -3)$	3
xz 平面	$(3, 0, -3)$	4

例題 4 中點公式與距離公式的應用

已知坐標空間中 $\triangle ABC$ 頂點坐標為 $A(4, -3, -3)$，$B(-2, 1, 5)$，$C(2, 5, 3)$，試求：

(1) $\overline{AB}$ 中點 M 與 $\overline{AC}$ 中點 N 的坐標。（各 2 分）

(2) $\overline{MN}$ 與 $\overline{BC}$ 的長度。（各 2 分）

(3) 說明 $\overline{MN}$ 與 $\overline{BC}$ 的關係。（2 分）

解

(1) $M\left(\dfrac{4-2}{2}, \dfrac{(-3)+1}{2}, \dfrac{(-3)+5}{2}\right)$

即 $M(1, -1, 1)$

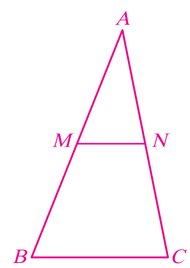
$N\left(\dfrac{4+2}{2}, \dfrac{(-3)+5}{2}, \dfrac{(-3)+3}{2}\right)$

即 $N(3, 1, 0)$

(2) $\overline{MN} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$\overline{BC} = \sqrt{16+16+4} = 6$

(3) $\overline{BC} = 2\overline{MN}$



例題 5 投影點與距離公式的應用(一)

(1) 坐標空間中，P 點在 xy 平面的投影點坐標為$(4,3,0)$，到 xy 平面的距離為 2，試求 P 點坐標。(有兩解)(6 分)

(2) 坐標空間中，Q 點在第一卦限，且 Q 在 y 軸的投影點坐標為$(0,6,0)$，在 x 軸的投影點為$(2,0,0)$，與原點距離為 7，試求 Q 點坐標。(4 分)

解 (1) 設 P 點坐標為$(4,3,c)$

$\because$ P 到 xy 平面距離為 2

$\therefore$ $|c|=2$ 得 $c=\pm 2$

$\therefore$ P 點坐標為$(4,3,2)$或$(4,3,-2)$

(2) 設 Q 點坐標為$(2,6,t)$

由已知，$\sqrt{4+36+t^2}=7$

$\Rightarrow 40+t^2=49$

$\Rightarrow t^2=9$

$\Rightarrow t=\pm 3$

但 Q 點在第一卦限，取 $t=3$

$\therefore$ Q 點坐標為$(2,6,3)$

例題 6 投影點與距離公式的應用(二)

坐標空間中相異兩點 $A(0,2,6)$，$B(6,-1,3)$，P 為 x 軸上一點，且 $\overline{PA}=2\overline{PB}$，試求 P 點坐標。(有兩解)(5 分)

解 由已知，設 $P(a,0,0)$

$\because$ $\overline{PA}=2\overline{PB}$

$\therefore$ $\sqrt{a^2+4+36}=2\sqrt{(a-6)^2+1+9}$

兩邊平方得

$a^2+40=4(a^2-12a+36+10)$

$\Rightarrow a^2+40=4a^2-48a+184$

$\Rightarrow 3a^2-48a+144=0$

$\Rightarrow a^2-16a+48=0$

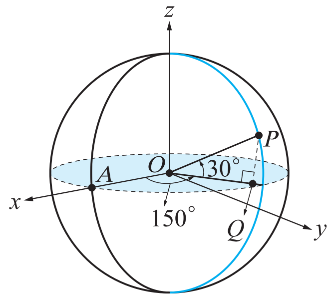
$\Rightarrow (a-4)(a-12)=0$

$\Rightarrow a=4$ 或 12

$\therefore$ P 點坐標$(4,0,0)$或$(12,0,0)$

例題 7　將球面上的經緯度換算為空間坐標

如右圖，在半徑為 12 的球面建立空間坐標系，球心 O 為原點，赤道在 xy 平面上，x 軸正向與赤道交於 A 點，且 A 點在 0 度經線上。已知 P 點為北緯 30 度與東經 150 度的交點，假設 P 在赤道面的投影點為 Q，試求：

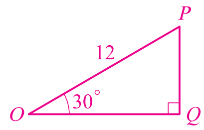


(1) $\overline{OQ}$ 長度。（3 分）

(2) $\overline{PQ}$ 長度。（3 分）

(3) P 點的空間坐標。（4 分）

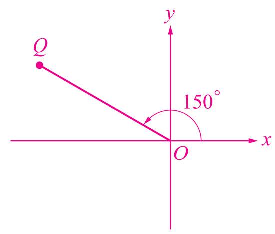
解 如右圖



(1) $\overline{OQ}=\overline{OP}\cos 30^\circ=12\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=6\sqrt{3}$

(2) $\overline{PQ}=\overline{OP}\sin 30^\circ=12\times\dfrac{1}{2}=6$

(3) 在 xy 平面上，Q 點的 x，y 坐標為



$\overline{OQ}\cos 150^\circ=6\sqrt{3}\times\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=-9$

$\overline{OQ}\sin 150^\circ=6\sqrt{3}\times\dfrac{1}{2}=3\sqrt{3}$

$\therefore$ P 點的空間坐標為 $(-9，3\sqrt{3}，6)$

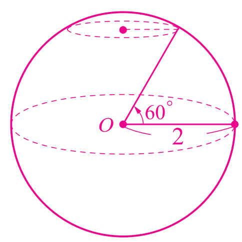
例題 8　球面上的距離計算

兒童樂園裡有一個半徑為 2 公尺的地球儀，試求：

(1) 有一隻螞蟻沿著北緯 60 度線，從東經 120 度向東走到西經 150 度，試問這隻螞蟻走了幾公尺？（5 分）

(2) 另有一隻螞蟻沿著東經 120 度線，從北緯 45 度向南走到南緯 75 度，試問這隻螞蟻走了幾公尺？（5 分）

解 (1) 如右圖，北緯 60 度所在的小圓半徑為 $2\cos 60^\circ=1$ 公尺



由東經 120 度向東走到西經 150 度，共走 90 度，即 $\dfrac{\pi}{2}$ 弳

$\therefore$所求為 $1\times\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{2}$（公尺）

(2) 東經 120 度所在的大圓半徑為 2 公尺

由北緯 45 度向南走到南緯 75 度，共走 120 度，即 $\dfrac{2\pi}{3}$ 弳

$\therefore$所求為 $2\times\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{4\pi}{3}$（公尺）

例題 9　對蹠點—經緯度的計算問題

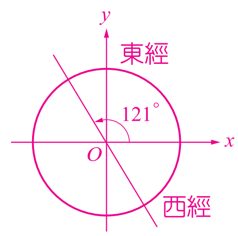
所謂對蹠點（antipode），是指球面上任一點與球心的連線，在球面的另一端與球面的交點。例如，從地表上某一點 P 與地心連線，這條線穿過地心後，會與地表在另一端交於一點 Q，這個交點 Q 就是 P 的對蹠點。因此，我們可以說，球體直徑兩端的點，互為對蹠點。請根據以上說明，回答下列問題：

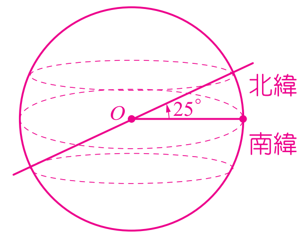
(1) 已知甲地位於東經 121 度，北緯 25 度，試求甲地在地球上對蹠點的經緯度。（5 分）

(2) 假設乙地位於東經 α 度，北緯 β 度，試以 α，β 表示乙地在地球上對蹠點的經緯度。（5 分）

解 (1) 如右圖，顯然甲地對蹠點的經緯度在
西經 180 度 − 121 度 = 59 度，南緯 25 度

(2) 由(1)的討論知乙地對蹠點的經緯度在
西經（$180-\alpha$）度，南緯 β 度

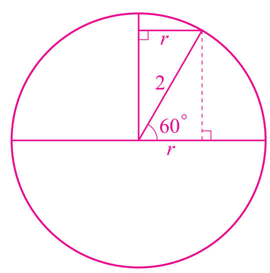




例題 10　球面上相同緯度兩點的距離

半徑為 2 的球面上，A 點為北緯 60 度、東經 40 度的交點，B 點為北緯 60 度、西經 80 度的交點，試求 $\overline{AB}$ 的長度。（10 分）

解 (1) 如圖(一)
先求 A、B 兩點所在北緯 60 度的小圓半徑 r
$r=2\cos 60^\circ=1$

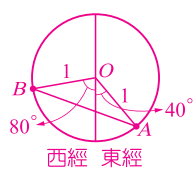


圖(一)

(2) 如圖(二)
$\overline{OA}$、$\overline{OB}$ 的夾角為 120°
由餘弦定理得

$$\overline{AB}^2=1^2+1^2-2\times1\times1\times\cos120^\circ$$
$$=1+1-2\times\left(-\frac{1}{2}\right)=3$$

故得 $\overline{AB}=\sqrt{3}$



圖(二)