



1-1 空間概念

重點整理

基本物件

點、直線、平面為空間中的基本物件。

基本事實

1. 相異兩點決定唯一的直線，兩端可以無窮延伸。
2. 不共線的相異三點決定唯一的平面，可以無窮延伸。
3. 一平面中相異兩點所決定的直線落在此平面上。

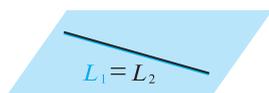
決定一平面的條件

1. 不共線的相異三點。
2. 一直線及線外一點。
3. 恰交於一點的兩直線。
4. 兩平行直線。

一、直線與直線的關係

空間中兩直線 L_1 與 L_2 的位置關係有四種：

1. 兩直線重合，如圖(一)所示。
2. 兩直線恰交於一點，如圖(二)所示。
3. 兩直線平行，如圖(三)所示。
4. 兩直線歪斜：不平行也不相交，各自落在一個平面上，如圖(四)所示。



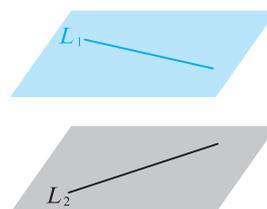
圖(一)



圖(二)



圖(三)



圖(四)

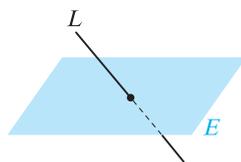
二、直線與平面的關係

1. 直線與平面的關係：

- (1) 直線 L 與平面 E 不相交(又稱直線與平面平行，記為 $L // E$)，如圖(五)所示。
- (2) 直線 L 與平面 E 相交於一點，如圖(六)所示。
- (3) 直線 L 落在平面 E 上(此時兩者交於無限多點)，如圖(七)所示。



圖(五)

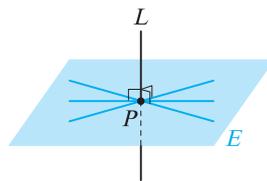


圖(六)



圖(七)

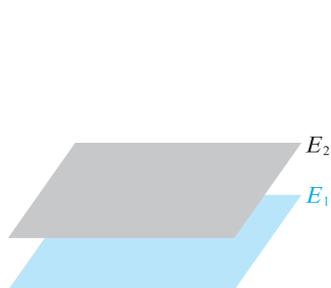
2. 直線與平面垂直：設直線 L 與平面 E 相交於 P ，且平面上通過 P 的每一條直線都與 L 垂直，則稱直線 L 與平面 E 垂直，如右圖所示。



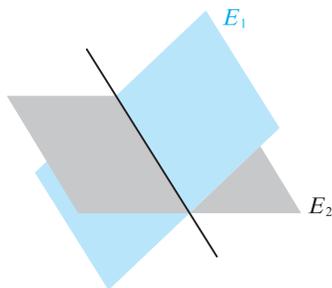
三、平面與平面的關係

1. 平面與平面的關係：

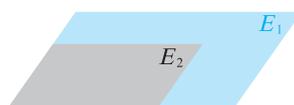
- (1) 平面 E_1 與平面 E_2 不相交（也稱兩者平行），如圖(八)所示。
- (2) 平面 E_1 與平面 E_2 相交於一直線，如圖(九)所示。
- (3) 平面 E_1 與平面 E_2 重合，如圖(十)所示。



圖(八)



圖(九)

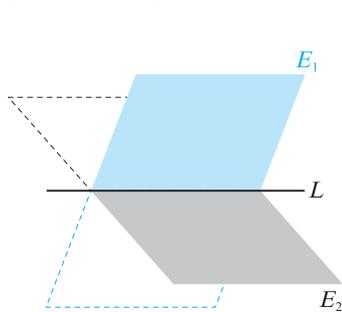


圖(十)

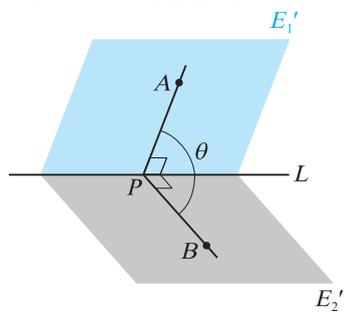
2. 兩面角：

兩平面 E_1 與 E_2 相交於一直線 L 時，由兩個半平面及其交線所組成的圖形稱為兩面角。兩相交平面共有四個兩面角，如圖(十一)所示。

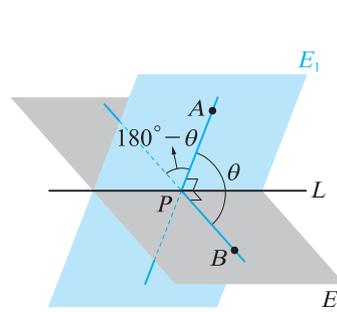
在這個邊界直線 L 上任取一點 P ，分別在半平面 E_1' 與 E_2' 上作與直線 L 垂直的射線 PA 與射線 PB ，則 $\angle APB$ 的大小 θ 就是此兩面角的大小，如圖(十二)所示。



圖(十一)



圖(十二)



圖(十三)

3. 兩平面的夾角：

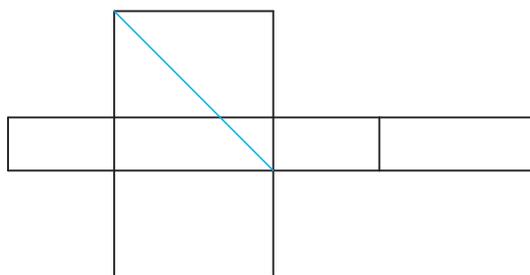
兩相交平面有四個兩面角，都可稱為此兩平面的夾角，它們之間有互補或相等的關係，如圖(十三)所示。

四、長方體表面上的兩點距離

長方體是平行六面體的一種，各稜的夾角都是直角 (90°)，其圖形展開時，有 6 個矩形。我們可利用長方體的展開圖來討論表面上的兩點距離。



立體圖



展開圖

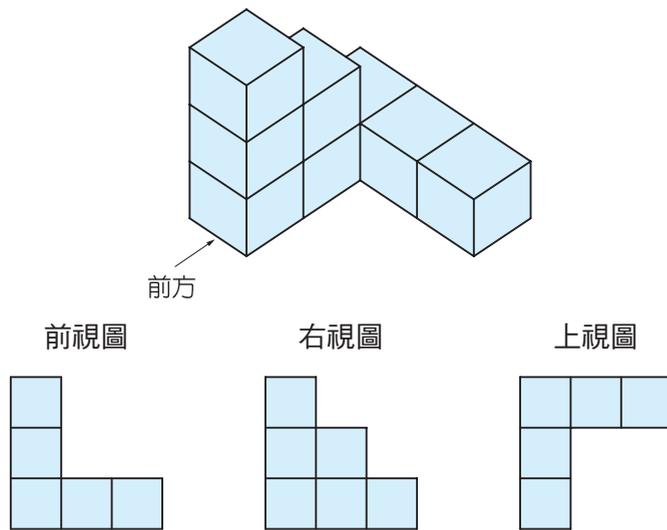


五、空間中立體圖形的展開圖與三視圖

1. 三視圖 (three-view drawing) :

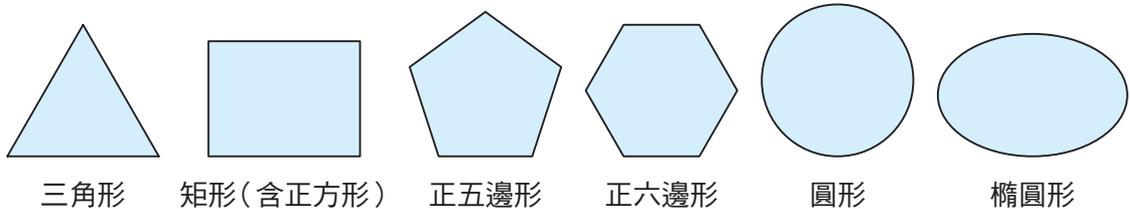
由立體圖的前方、右方、上方觀察圖形，分別獲得前視圖、右視圖、上視圖。

例：



2. 立體圖形的展開圖：

一般的立體圖形，展開時，各面圖形為多邊形或圓形、橢圓形等，舉例如下：

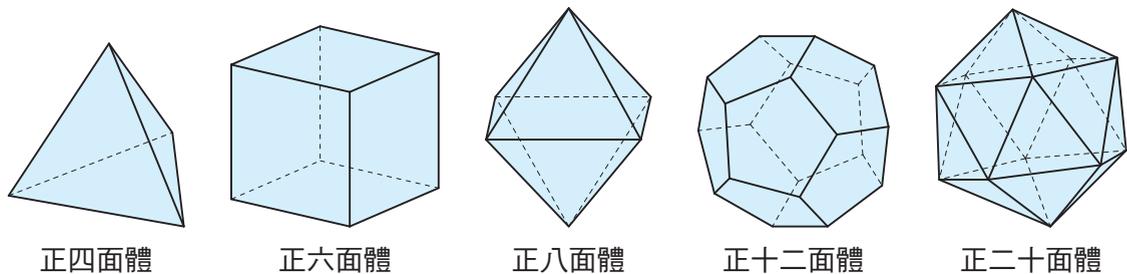


六、平面與空間圖形的截痕

1. 平面與立體圖形相交的部分稱為截痕，而截痕所圍成的圖形稱為截面。

2. 正多面體：

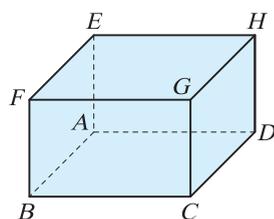
如果凸多面體的每個面都是全等的正多邊形，則稱為正多面體，正多面體共有五種：正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體。





● 例題 1 空間中直線與直線的關係(一)

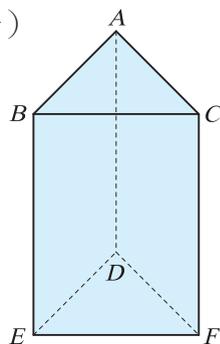
如右圖一個長方體，試問：由各邊所決定的直線中，哪些與 \overline{AB} 平行？
(6分)



解 直線 CD 、 EF 、 GH 與 \overline{AB} 平行

● 例題 2 空間中直線與直線的關係(二)

如右圖一個三角柱，試問：由各邊所決定的直線中，哪些與 \overline{AB} 歪斜？(6分)



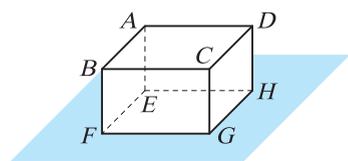
解 直線 DF 、 EF 、 CF 與 \overline{AB} 歪斜

● 例題 3 空間中直線與平面的關係(一)

如右圖一個長方體，試問：由各邊所決定的直線中，

(1) 哪些與平面 $EFGH$ 垂直？(6分)

(2) 哪些與平面 $EFGH$ 平行？(6分)



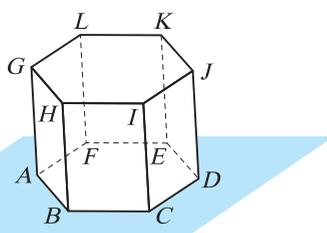
解 (1) 直線 AE 、 BF 、 CG 、 DH 與平面 $EFGH$ 垂直

(2) 直線 AB 、 BC 、 CD 、 DA 與平面 $EFGH$ 平行

例題 4 空間中直線與平面的關係(二)

如右圖一個正六角柱，試問：由各邊所決定的直線中，

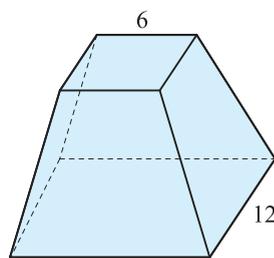
- (1) 哪些與平面 $ABCDEF$ 垂直？(6分)
- (2) 哪些與平面 $ABCDEF$ 平行？(6分)



- 解**
- (1) 直線 GA 、 HB 、 IC 、 JD 、 KE 、 LF 與平面 $ABCDEF$ 垂直
 - (2) 直線 HI 、 IJ 、 JK 、 KL 、 LG 、 GH 與平面 $ABCDEF$ 平行

例題 5 立體圖形的表面積

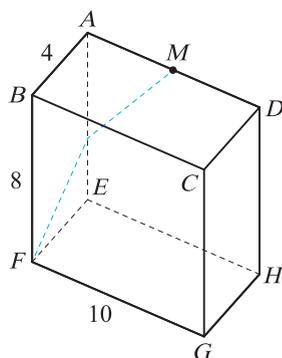
如右圖立體圖形，頂部是邊長 6 公分的正方形，底部是邊長 12 公分的正方形，側面是相等的等腰梯形，梯形高為 10 公分，試求這個立體圖形的表面積。(6分)



- 解**
- $$6^2 + \frac{10(6+12)}{2} \times 4 + 12^2$$
- $$= 36 + 360 + 144$$
- $$= 540 \text{ (平方公分)}$$

例題 6 長方體表面的最短距離

如右圖是一個長方體，長、寬、高分別為 10、4、8，試求 \overline{AD} 中點 M 到 F 點的最短距離。(6分)

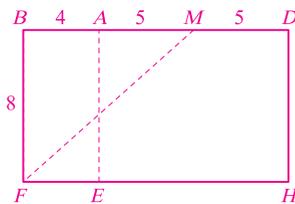


解 作部分展開圖

$$\overline{AM} = \frac{1}{2} \overline{AD} = 5$$

$$\overline{BM} = \overline{BA} + \overline{AM} = 4 + 5 = 9$$

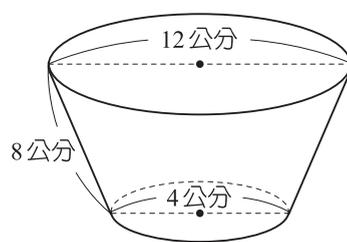
$$\therefore \overline{MF} = \sqrt{9^2 + 8^2} = \sqrt{145}$$



● 例題 7 立體圖形的表面積

如右圖是一個蛋塔形狀的木製品，試求：

- (1) 此木製品側面表面積。(6分)
- (2) 此木製品的全部表面積(包含頂部及底部)。(6分)



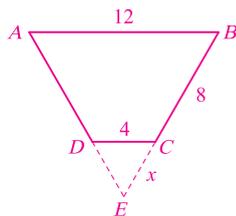
解 作前視圖如右

延長 \overline{AD} 、 \overline{BC} 交於 E 點

令 $\overline{CE} = x$

$\therefore \triangle EAB \sim \triangle EDC$

$$\therefore \frac{x}{4} = \frac{8+x}{12} \text{ 得 } x=4, \overline{BE}=12$$



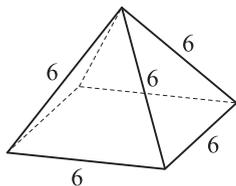
$$(1) \text{ 側面表面積為 } \pi \cdot 12 \cdot 6 - \pi \cdot 4 \cdot 2 \\ = 64\pi \text{ (平方公分)}$$

$$(2) 64\pi + \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 2^2 \\ = 104\pi \text{ (平方公分)}$$

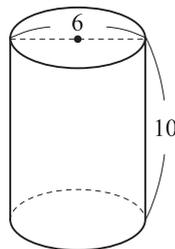
● 例題 8 立體圖形的展開圖

請畫出下列各題的展開圖。

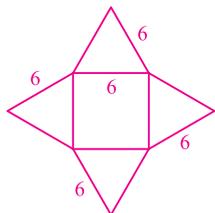
- (1) 金字塔圖形。(5分)



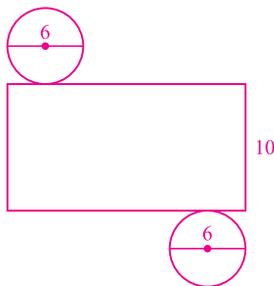
- (2) 圓柱體。(5分)



解 (1)

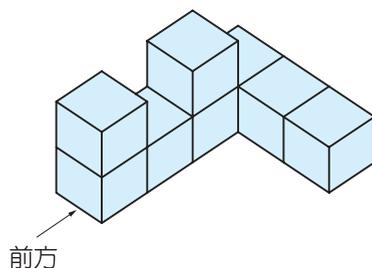


(2)



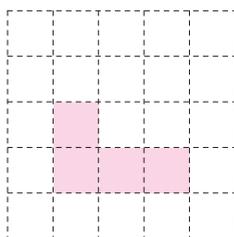
● 例題 9 三視圖

如下圖一個立體圖形，請畫出它的三視圖。(10分)

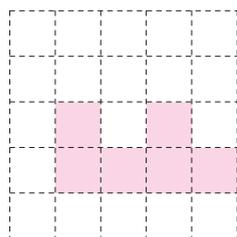


解

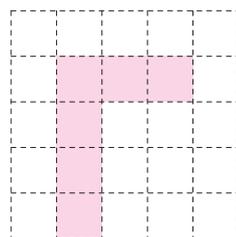
前視圖



右視圖



上視圖



● 例題 10 正多面體

每個面都是全等正多邊形的凸多面體，稱為正多面體，它的每一個頂點所接的都是相同種類且數量一樣的正多邊形。符合這些條件的凸多面體共有五種(如下表)。請查詢相關資料，例如參考課本內容、上網搜尋，或與同學討論，並完成下表(每格1分)及關係式空格(每格2分)。(本題20分)

解

正多面體面數	四	六	八	十二	二十
各面正多邊形邊數	3	4	3	5	3
頂點數 (V)	4	8	6	20	12
稜數 (E)	6	12	12	30	30
面數 (F)	4	6	8	12	20
$V - E + F$	2	2	2	2	$12 - 30 + 20 = 2$

著名的數學家尤拉(Euler)發現這五種正多面體的頂點數(V)、稜數(E)、面數(F)之間有共同關係，請完成這個關係式： $V - E + F = \underline{2}$ 。
 這個關係式也有人把它寫成： $F + V = \underline{E + 2}$ 。