



1-2 空間坐標系

重點整理

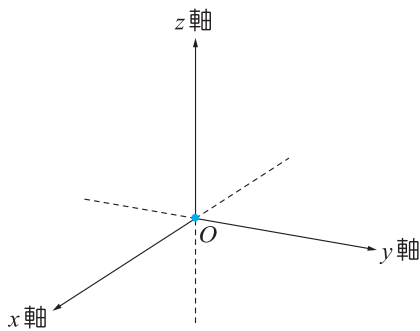
一、空間坐標系

1. 空間坐標系：

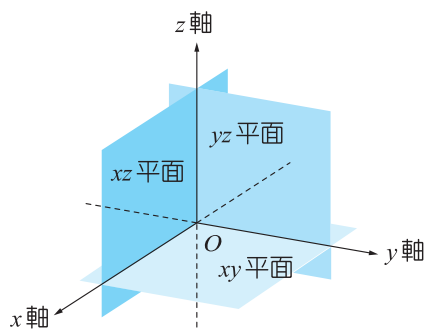
如圖(一)，空間中取一點 O 作為原點，通過原點 O 作三條兩兩互相垂直的直線，分別稱為 x 軸、 y 軸、 z 軸。

x 軸與 y 軸決定的平面稱為 xy 平面， y 軸與 z 軸決定的平面稱為 yz 平面， x 軸與 z 軸決定的平面稱為 xz 平面。此三平面兩兩互相垂直，把空間分隔成 8 個卦限，而所形成的坐標系就稱為空間坐標系。

特別地，由三個坐標軸的正向所圍成的卦限稱為第一卦限，如圖(二)。



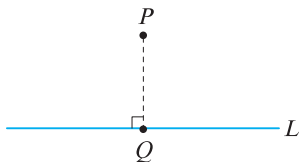
圖(一)



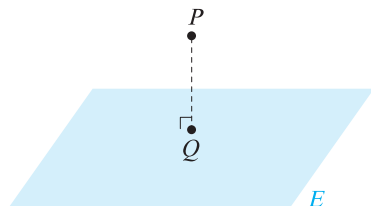
圖(二)

2. 投影點(正射影點)：

如圖(三)、圖(四)，在空間中，過 P 點作直線 L 或平面 E 的垂線，設垂足為 Q 點，則稱 Q 點為 P 點在直線 L 或平面 E 的投影點(正射影點)。



圖(三)



圖(四)

根據上述，我們將點 $P(a, b, c)$ 分別在三坐標軸及三坐標平面上的投影點之坐標整理如下表。

坐標軸	x 軸	y 軸	z 軸
P 點的投影點坐標	$(a, 0, 0)$	$(0, b, 0)$	$(0, 0, c)$

坐標平面	xy 平面	yz 平面	xz 平面
P 點的投影點坐標	$(a, b, 0)$	$(0, b, c)$	$(a, 0, c)$

3. 中點公式：

坐標空間中兩點 $P(x_1, y_1, z_1)$ ， $Q(x_2, y_2, z_2)$ ，則線段 PQ 的中點 M 的坐標為 $\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2}\right)$ 。

例：坐標空間中兩點 $P(4, 5, 7)$ ， $Q(-2, 3, -1)$ ，則線段 PQ 的中點 M 的坐標為 $\left(\frac{4+(-2)}{2}, \frac{5+3}{2}, \frac{7+(-1)}{2}\right) = (1, 4, 3)$ 。

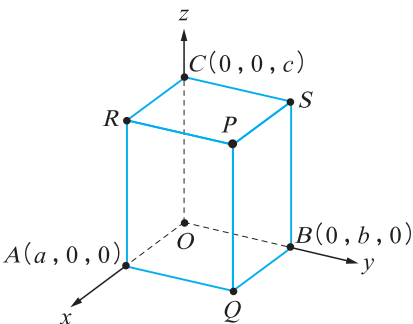


4. 距離公式：

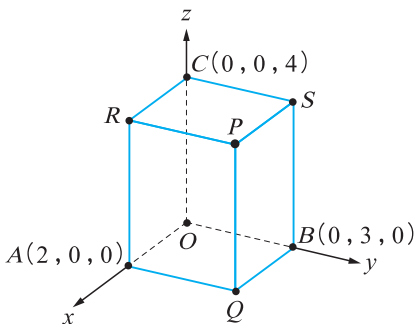
坐標空間中兩點 $P(x_1, y_1, z_1)$ ， $Q(x_2, y_2, z_2)$ ，則 P 、 Q 兩點的距離為 $\overline{PQ} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$ 。

例：坐標空間中兩點 $P(2, 3, 3)$ ， $Q(-1, 1, -3)$ ，則 P 、 Q 兩點的距離為 $\overline{PQ} = \sqrt{(2 + 1)^2 + (3 - 1)^2 + (3 + 3)^2} = \sqrt{49} = 7$ 。

5. 設 $P(a, b, c)$ 為坐標空間中的一個點，則 P 點到坐標軸與坐標平面的距離，如下。



例：



給定點坐標	$P(a, b, c)$	例： $P(2, 3, 4)$
P 點到 x 軸的距離	$\sqrt{b^2 + c^2}$	$\sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$
P 點到 y 軸的距離	$\sqrt{a^2 + c^2}$	$\sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$
P 點到 z 軸的距離	$\sqrt{a^2 + b^2}$	$\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13}$
P 點到 xy 平面的距離	$ c $	$ 4 = 4$
P 點到 yz 平面的距離	$ a $	$ 2 = 2$
P 點到 xz 平面的距離	$ b $	$ 3 = 3$

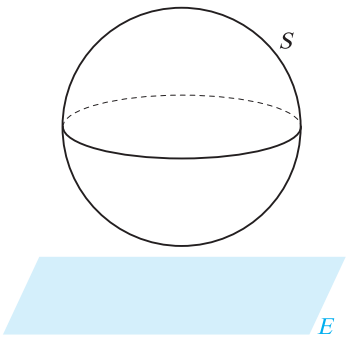
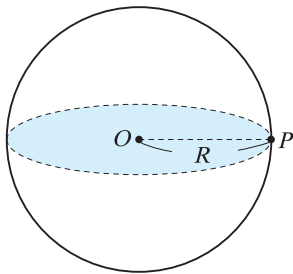
二、球面與平面的截痕及經緯線

1. 球面與平面的關係：

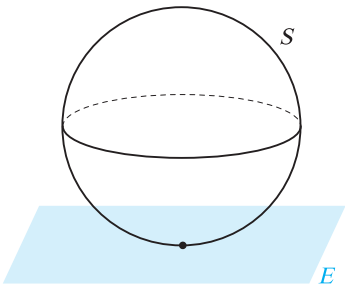
空間中與一定點 O 距離為 R 的所有點 P 所形成的圖形稱為球面，如右圖所示，其中定點 O 稱為**球心**， R 稱為**球半徑**。

空間中平面 E 與球面 S 的相交情形有三種：

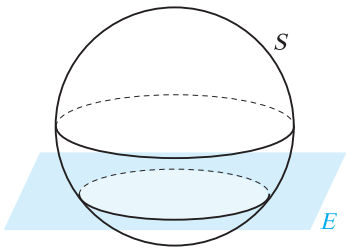
- (1) 平面 E 與球面 S 不相交，如圖(五)。
- (2) 平面 E 與球面 S 恰交於一點，如圖(六)。
- (3) 平面 E 與球面 S 交於一圓，如圖(七)。



圖(五)



圖(六)



圖(七)

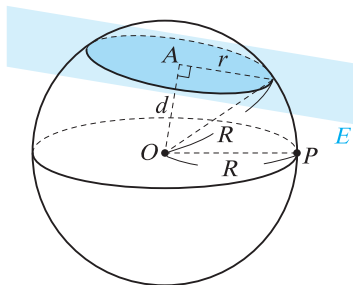


2. 截痕及經緯度：

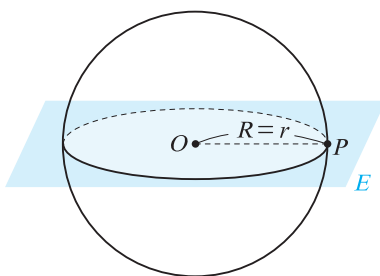
如圖(八)，平面 E 與球心 O 的垂直距離 d 小於球半徑 R 時，平面 E 與球面相交的部分是一個圓，其半徑為 $r = \sqrt{R^2 - d^2}$ 。

小圓：平面 E 不通過球心 O 時，所截的圓稱為**小圓**。

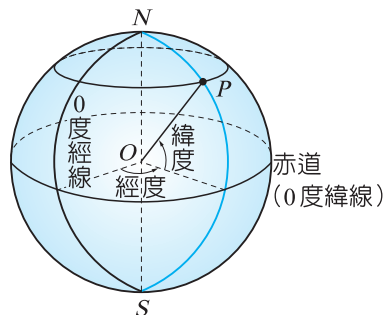
大圓：平面 E 通過球心 O 時，所截的圓稱為**大圓**，其半徑恰為球半徑 R ，如圖(九)。



圖(八)



圖(九)



圖(十)

如圖(十)， O 為球心， S 、 N 分別為球面的南、北極。

(1) 經線 (longitude line)：

沿地表連接 N 與 S 的大圓弧 (半個大圓)，稱為**經線**。通過英國格林威治天文臺的經線為 0 度經線，其餘的區分為東經線與西經線，其度數就是該經線所在的半平面與 0 度經線的半平面所夾的兩面角的度數，取值為 0° 至 180° 。

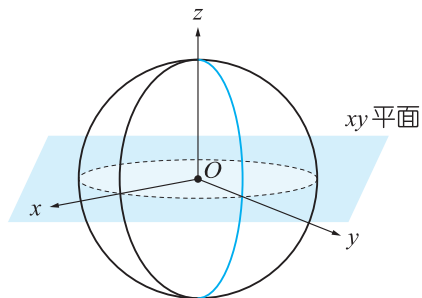
(2) 緯線 (latitude line)：

垂直 $\overline{NS}$ 的平面與球面所相交的圓，稱為**緯線**。

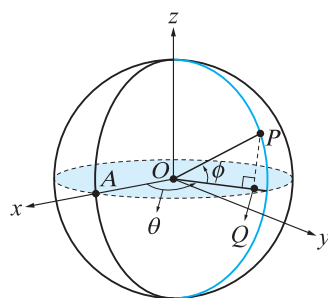
① 垂直 $\overline{NS}$ 的平面與球面所相交的圓當中，唯一的大圓，稱為**赤道** (equator)，也稱為 **0 度緯線**。

② 其餘的小圓區分為北緯線與南緯線，其度數就是經過此緯線上任一點的球半徑與赤道面所夾的度數。

3. 經緯度換算為空間坐標：



圖(十一)



圖(十二)

如圖(十一)，以球心 O 為空間坐標系的原點，赤道 (0 度緯線) 所在的平面為 xy 平面。 x 軸正向在 0 度經線上， y 軸正向在東經 90 度上。

經度方面，東經為正，西經為負。緯度方面，北緯為正，南緯為負。

假設地球表面 P 點所在的經度為 θ ，所在的緯度為 ϕ ，如圖(十二)。

將地心 O 與 P 所連的 $\overline{OP}$ 在赤道面的投影稱為 $\overline{OQ}$ ，我們有 $\overline{OQ} = \overline{OP} \cos \phi$ 。

將 $\overline{OQ}$ 乘以 $\cos \theta$ ，即 $\overline{OQ} \cos \theta$ ，就是 P 點的 x 坐標。

將 $\overline{OQ}$ 乘以 $\sin \theta$ ，即 $\overline{OQ} \sin \theta$ ，就是 P 點的 y 坐標。

將 $\overline{OP}$ 乘以 $\sin \phi$ ，即 $\overline{OP} \sin \phi$ ，就是 P 點的 z 坐標。

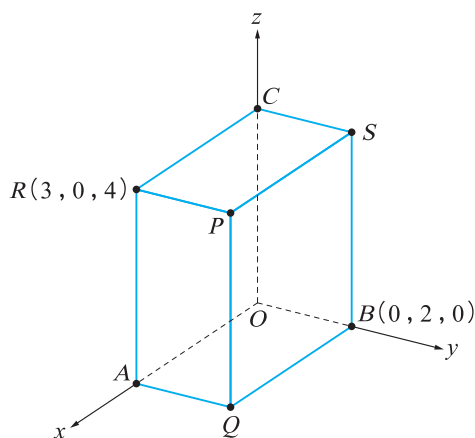


● 例題 1 空間坐標系的點坐標(一)

右圖為坐標空間中的一個長方體，已知 $B(0, 2, 0)$ ， $R(3, 0, 4)$ ，試求：

- (1) S 點坐標。(3 分)
- (2) Q 點坐標。(2 分)

解 (1) $S(0, 2, 4)$
(2) $Q(3, 2, 0)$



● 例題 2 空間中任一點到坐標軸與坐標平面的投影點與距離

已知坐標空間中一點 $P(3, 4, -3)$ ，試求 P 點在三個坐標軸與三個坐標平面的投影點坐標，以及 P 點到這些軸與平面的距離。(每格 2 分，本題共 20 分)

解		投影點坐標	距離
	x 軸	$(3, 0, 0)$	5
	y 軸	$(0, 4, 0)$	$3\sqrt{2}$
	z 軸	$(0, 0, -3)$	5
	xy 平面	$(3, 4, 0)$	3
	yz 平面	$(0, 4, -3)$	3
	xz 平面	$(3, 0, -3)$	4

**例題 3 中點公式與距離公式的應用**

已知坐標空間中 $\triangle ABC$ 頂點坐標為 $A(4, -3, -3)$ ， $B(-2, 1, 5)$ ， $C(2, 5, 3)$ ，試求：

- (1) $\overline{AB}$ 中點 M 與 $\overline{AC}$ 中點 N 的坐標。(各 2 分)
- (2) $\overline{MN}$ 與 $\overline{BC}$ 的長度。(各 2 分)
- (3) 說明 $\overline{MN}$ 與 $\overline{BC}$ 的關係。(2 分)

解 (1) $M\left(\frac{4-2}{2}, \frac{(-3)+1}{2}, \frac{(-3)+5}{2}\right)$

即 $M(1, -1, 1)$

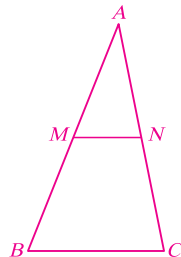
$N\left(\frac{4+2}{2}, \frac{(-3)+5}{2}, \frac{(-3)+3}{2}\right)$

即 $N(3, 1, 0)$

(2) $\overline{MN} = \sqrt{4+4+1} = 3$

$\overline{BC} = \sqrt{16+16+4} = 6$

(3) $\overline{BC} = 2\overline{MN}$

**例題 4 投影點與距離公式的應用(一)**

- (1) 坐標空間中， P 點在 xy 平面的投影點坐標為 $(4, 3, 0)$ ，到 xy 平面的距離為 2，試求 P 點坐標。(有兩解)(6 分)
- (2) 坐標空間中， Q 點在第一卦限，且 Q 在 y 軸的投影點坐標為 $(0, 6, 0)$ ，在 x 軸的投影點為 $(2, 0, 0)$ ，與原點距離為 7，試求 Q 點坐標。(4 分)

解 (1) 設 P 點坐標為 $(4, 3, c)$

$\because P$ 到 xy 平面距離為 2

$\therefore |c| = 2$ 得 $c = \pm 2$

$\therefore P$ 點坐標為 $(4, 3, 2)$ 或 $(4, 3, -2)$

(2) 設 Q 點坐標為 $(2, 6, t)$

由已知， $\sqrt{4+36+t^2} = 7$

$\Rightarrow 40 + t^2 = 49$

$\Rightarrow t^2 = 9$

$\Rightarrow t = \pm 3$

但 Q 點在第一卦限，取 $t = 3$

$\therefore Q$ 點坐標為 $(2, 6, 3)$

**例題 5 投影點與距離公式的應用(二)**

坐標空間中相異兩點 $A(0, 2, 6)$, $B(6, -1, 3)$, P 為 x 軸上一點, 且 $\overline{PA} = 2\overline{PB}$, 試求 P 點坐標。(有兩解)(5 分)

解 由已知, 設 $P(a, 0, 0)$

$$\because \overline{PA} = 2\overline{PB}$$

$$\therefore \sqrt{a^2 + 4 + 36} = 2\sqrt{(a-6)^2 + 1 + 9}$$

兩邊平方得

$$a^2 + 40 = 4(a^2 - 12a + 36 + 10)$$

$$\Rightarrow a^2 + 40 = 4a^2 - 48a + 184$$

$$\Rightarrow 3a^2 - 48a + 144 = 0$$

$$\Rightarrow a^2 - 16a + 48 = 0$$

$$\Rightarrow (a-4)(a-12) = 0$$

$$\Rightarrow a = 4 \text{ 或 } 12$$

$$\therefore P \text{ 點坐標 } (4, 0, 0) \text{ 或 } (12, 0, 0)$$

例題 6 將球面上的經緯度換算為空間坐標

如右圖, 在半徑為 12 的球面建立空間坐標系, 球心 O 為原點, 赤道在 xy 平面上, x 軸正向與赤道交於 A 點, 且 A 點在 0 度經線上。已知 P 點為北緯 30 度與東經 150 度的交點, 假設 P 在赤道面的投影點為 Q , 試求:

- (1) $\overline{OQ}$ 長度。(3 分)
- (2) $\overline{PQ}$ 長度。(3 分)
- (3) P 點的空間坐標。(4 分)

解 如右圖

$$(1) \overline{OQ} = \overline{OP} \cos 30^\circ = 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$$

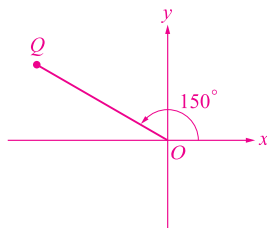
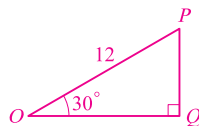
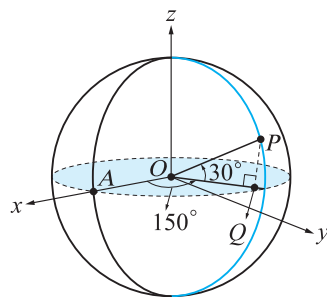
$$(2) \overline{PQ} = \overline{OP} \sin 30^\circ = 12 \times \frac{1}{2} = 6$$

(3) 在 xy 平面上, Q 點的 x, y 坐標為

$$\overline{OQ} \cos 150^\circ = 6\sqrt{3} \times \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -9$$

$$\overline{OQ} \sin 150^\circ = 6\sqrt{3} \times \frac{1}{2} = 3\sqrt{3}$$

$$\therefore P \text{ 點的空間坐標為 } (-9, 3\sqrt{3}, 6)$$



**例題 7 球面上的距離計算**

兒童樂園裡有一個半徑為 2 公尺的地球儀，試求：

- (1) 有一隻螞蟻沿著北緯 60 度線，從東經 120 度向東走到西經 150 度，試問這隻螞蟻走了幾公尺？(5 分)
- (2) 另有一隻螞蟻沿著東經 120 度線，從北緯 45 度向南走到南緯 75 度，試問這隻螞蟻走了幾公尺？(5 分)

解 (1) 如右圖，北緯 60 度所在的小圓半徑為 $2 \cos 60^\circ = 1$ 公尺

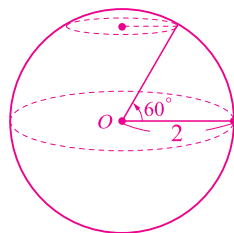
由東經 120 度向東走到西經 150 度，共走 90 度，即 $\frac{\pi}{2}$ 弧

$$\therefore \text{所求為 } 1 \times \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \text{ (公尺)}$$

(2) 東經 120 度所在的大圓半徑為 2 公尺

由北緯 45 度向南走到南緯 75 度，共走 120 度，即 $\frac{2\pi}{3}$ 弧

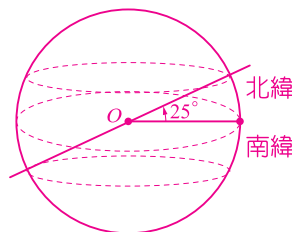
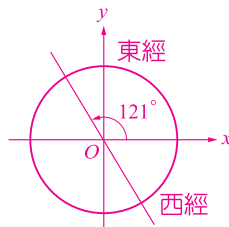
$$\therefore \text{所求為 } 2 \times \frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3} \text{ (公尺)}$$

**例題 8 對蹠點—經緯度的計算問題**

所謂對蹠點 (antipode)，是指球面上任一點與球心的連線，在球面的另一端與球面的交點。例如，從地表上某一點 P 與地心連線，這條線穿過地心後，會與地表在另一端交於一點 Q ，這個交點 Q 就是 P 的對蹠點。因此，我們可以說，球體直徑兩端的點，互為對蹠點。請根據以上說明，回答下列問題：

- (1) 已知甲地位於東經 121 度，北緯 25 度，試求甲地在地球上對蹠點的經緯度。(5 分)
- (2) 假設乙地位於東經 α 度，北緯 β 度，試以 α, β 表示乙地在地球上對蹠點的經緯度。(5 分)

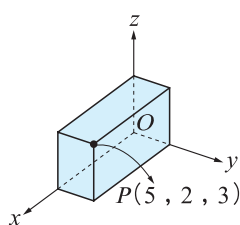
解 (1) 如右圖，顯然甲地對蹠點的經緯度在
西經 $180 \text{ 度} - 121 \text{ 度} = 59 \text{ 度}$ ，南緯 25 度
(2) 由(1)的討論知乙地對蹠點的經緯度在
西經 $(180 - \alpha) \text{ 度}$ ，南緯 $\beta \text{ 度}$



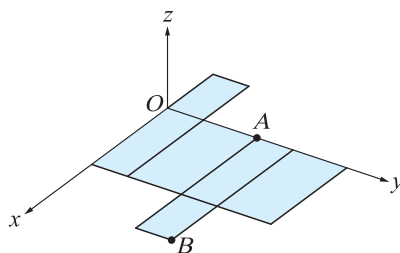
● 例題 9 空間坐標系的點坐標(二)

圖(一)是坐標空間中的長方體，圖(二)是長方體的展開圖。試求：

- (1) A 點在圖(一)的坐標。(5 分)
- (2) B 點在圖(一)的坐標。(5 分)



圖(一)



圖(二)

解 已知 P 點坐標為 $(5, 2, 3)$

故知長方體在 x 軸、 y 軸、 z 軸方向的長、寬、高分別為 5 、 2 、 3

- (1) 觀察 A 點在三軸的移動量

在 x 軸方向移動量是 0

在 y 軸方向移動量是 2

在 z 軸方向移動量是 3

故知 A 點坐標為 $(0, 2, 3)$

- (2) 同理， B 點在三軸的移動量分別是 5 、 0 、 0

故知 B 點坐標為 $(5, 0, 0)$

● 例題 10 球面上相同緯度兩點的距離

半徑為 2 的球面上， A 點為北緯 60° 、東經 40° 的交點， B 點為北緯 60° 、西經 80° 的交點，試求 $\overline{AB}$ 的長度。(10 分)

解 (1) 如圖(一)

先求 A 、 B 兩點所在北緯 60° 的小圓半徑 r

$$r = 2 \cos 60^\circ = 1$$

- (2) 如圖(二)

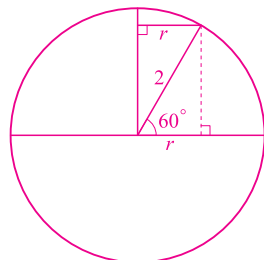
$\overline{OA}$ 、 $\overline{OB}$ 的夾角為 120°

由餘弦定理得

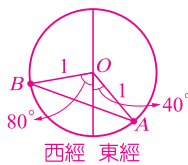
$$\overline{AB}^2 = 1^2 + 1^2 - 2 \times 1 \times 1 \times \cos 120^\circ$$

$$= 1 + 1 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 3$$

故得 $\overline{AB} = \sqrt{3}$



圖(一)



圖(二)