第3章 綜合演練

月　日　　得分

一、單選題（每題 5 分，共 10 分）

1. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，則 $AB=$？

(A) $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}1 & 9\\ 0 & 1\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}4 & 0\\ 1 & 9\end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix}5 & 9\\ 1 & 3\end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix}3 & 3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$

解 $AB=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\times2+3\times1 & 1\times0+3\times3\\ 0\times2+1\times1 & 0\times0+1\times3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 9\\ 1 & 3\end{bmatrix}$

故選(D)

2. 設矩陣 $A=[a_{ij}]_{3\times2}$，其中 $a_{ij}=\begin{cases}-1，i<j\\ 0，i=j\\ 1，i>j\end{cases}$，則矩陣 A 所有元之和為何？

(A) -2　(B) 0　(C) 2

(D) 4　(E) 6

解 $A=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，$0+(-1)+1+0+1+1=2$

故選(C)

二、多選題（每題 5 分，所有選項均答對者得 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，其餘不給分，共 10 分）

3. 下列哪些二階方陣有乘法反方陣?

(A) $\begin{bmatrix}2 & 2\\ 4 & 5\end{bmatrix}$　(B) $\begin{bmatrix}3 & 9\\ 2 & 6\end{bmatrix}$　(C) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 12\end{bmatrix}$

(D) $\begin{bmatrix}2 & 1\\ -3 & 3\end{bmatrix}$　(E) $\begin{bmatrix}2 & 3\\ 4 & 6\end{bmatrix}$

解 二階方陣 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 的 $ad-bc\neq0$，則此方陣的乘法反方陣存在

(A) ○：$2\times5-2\times4=10-8=2\neq0$

(B) ×：$3\times6-9\times2=18-18=0$

(C) ○：$2\times12-3\times4=24-12=12\neq0$

(D) ○：$2\times3-1\times(-3)=6+3=9\neq0$

(E) ×：$2\times6-3\times4=12-12=0$

故選(A)(C)(D)

4. 已知矩陣 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}$，請選出正確的選項。

(A) A 是二階方陣　(B) A 有 2 列 2 行　(C) 第（1，2）元是 3

(D) $2A=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 6 & 8\end{bmatrix}$　(E) $AA=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 9 & 16\end{bmatrix}$

解 (A) ○：顯然正確

(B) ○：顯然正確

(C) ×：第（1，2）元是 1

(D) ○：$2A=2\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 6 & 8\end{bmatrix}$

(E) ×：$AA=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & 6\\ 18 & 19\end{bmatrix}$

故選(A)(B)(D)

三、填充題（每格 6 分，共 60 分）

5. 二階方陣 A 使得 $A\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 5\end{bmatrix}$，則：

(1) $A=$ ________。

(2) 若 $B=\begin{bmatrix}-3 & 5\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，則 $A+2B=$ ________。

解 (1) 由已知，$A\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}$，故得 $A=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

(2) $A+2B=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 2 & 5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-6 & 10\\ 4 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 14\\ 6 & 7\end{bmatrix}$

6. (1) 已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，若 $2X+3A=5B$，則矩陣 $X=$________。

(2) 已知 $M-N=\begin{bmatrix}1 & -6\\ -3 & 2\end{bmatrix}$，$M+N=\begin{bmatrix}3 & 4\\ 7 & -4\end{bmatrix}$，則矩陣 $M=$________。

解 (1) 由已知，$2X=5B-3A=\begin{bmatrix}5 & 0\\ 5 & 10\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3 & -6\\ 9 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ -4 & 10\end{bmatrix}$，故得 $X=\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & 5\end{bmatrix}$

(2) 將已知兩式相加，得 $2M=\begin{bmatrix}4 & -2\\ 4 & -2\end{bmatrix}$，故得 $M=\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & -1\end{bmatrix}$

7. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}2 & k\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，若 A 的乘法反方陣 A^{-1} 不存在，則 $k=$________。

解 A 的乘法反方陣 A^{-1} 不存在，則 $2\times3-k\times1=0$，解得 $k=6$

8. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}2 & 5\\ 1 & 3\end{bmatrix}$，假設有一矩陣 X 使得 $AX=\begin{bmatrix}-11 & 12 & 13\\ -7 & 7 & 7\end{bmatrix}$，則：

(1) X 為________階矩陣。

(2) $X=$________。

解 (1) 因為 A 為 2×2 階矩陣，AX 為 2×3 階矩陣，故 X 為 2×3 階矩陣

(2) $A^{-1}=\dfrac{1}{6-5}\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}$，

故 $X=A^{-1}\begin{bmatrix}-11 & 12 & 13\\ -7 & 7 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -5\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-11 & 12 & 13\\ -7 & 7 & 7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ -3 & 2 & 1\end{bmatrix}$

9. (1) 二階方陣 $A=\begin{bmatrix}2&5\\a&b\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$。若 $AB=BA$，則數對 $(a,b)=$ ________。

(2) 已知矩陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}-2&-1\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&5\end{bmatrix}$，則矩陣 $A=$ ________。

解 (1) 由已知，$\begin{bmatrix}-3&3\\a-b&-a+b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2-a&5-b\\a-2&-5+b\end{bmatrix}$

故得 $\begin{cases}-3=2-a\\3=5-b\\a-b=a-2\\-a+b=-5+b\end{cases}$

解之，得 $a=5$，$b=2$，故數對 $(a,b)=(5,2)$

(2) $\begin{bmatrix}-2&-1\\3&2\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{-4+3}\begin{bmatrix}2&1\\-3&-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&-1\\3&2\end{bmatrix}$，

故 $A=\begin{bmatrix}6&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2&-1\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&4\end{bmatrix}$

10. 已知三向量 $\vec{a}=(4,1)$，$\vec{b}=(-2,3)$，$\vec{c}=(2,11)$，若 $x\vec{a}+y\vec{b}=\vec{c}$，則數對 $(x,y)=$ ________。

解 由已知，$x\begin{bmatrix}4\\1\end{bmatrix}+y\begin{bmatrix}-2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\11\end{bmatrix}$，即 $\begin{bmatrix}4&-2\\1&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\11\end{bmatrix}$

因為 $\begin{bmatrix}4&-2\\1&3\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{1}{14}\begin{bmatrix}3&2\\-1&4\end{bmatrix}$，

所以 $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\dfrac{1}{14}\begin{bmatrix}3&2\\-1&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\11\end{bmatrix}=\dfrac{1}{14}\begin{bmatrix}28\\42\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}$

故得數對 $(x,y)=(2,3)$

四、計算題（每題 10 分，共 20 分）

11. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}-3&-4\\5&7\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1\\-3&-1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}$，若 $AX=B$，$Y=CX$，試求矩陣 Y。

解 由已知，$X=A^{-1}B$，代入 $Y=CX$ 得 $Y=CA^{-1}B$

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-3&-4\\5&7\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{-21+20}\begin{bmatrix}7&4\\-5&-3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-7&-4\\5&3\end{bmatrix}$$

故 $Y=CA^{-1}B=\begin{bmatrix}1&2\\-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-7&-4\\5&3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&2\\7&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\-3&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\2&3\end{bmatrix}$

12. 英文字母共有 26 個，所以我們可以將 a，b，c，……，z 編成 01、02、……、26 等 26 個號碼，並以行矩陣表示，如 $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 代表 a，$\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}$ 代表 b，…，$\begin{bmatrix}2\\6\end{bmatrix}$ 代表 z。使用時，先將單字編為號碼，再以矩陣 X 表示此單字。 例如，“*cat*”的編碼是 03，01，20，可用矩陣 $X=\begin{bmatrix}0&0&2\\3&1&0\end{bmatrix}$ 表示，接著用矩陣運算加密後，再傳送出去。若小輝與小偉以此方式傳送訊息，並約定用方陣 $A=\begin{bmatrix}1&1\\3&2\end{bmatrix}$ 加密，例如 $AX=\begin{bmatrix}1&1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&2\\3&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3&1&2\\6&2&6\end{bmatrix}$。

(1) 小輝要傳送 *zoo* 給小偉，試求加密後的訊息矩陣。（5 分）

(2) 小輝收到小偉傳來的訊息（加密後）矩陣為 $\begin{bmatrix}3&9&6&5\\7&18&13&11\end{bmatrix}$，試求小偉的原始訊息。（5 分）

解

(1) 首先將 *zoo* 編碼為 26，15，15，令 $X=\begin{bmatrix}2&1&1\\6&5&5\end{bmatrix}$

$AX=\begin{bmatrix}1&1\\3&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1&1\\6&5&5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}8&6&6\\18&13&13\end{bmatrix}$，此為加密後的訊息矩陣

(2) 加密方陣的乘法反方陣 $A^{-1}=\frac{1}{2-3}\begin{bmatrix}2&-1\\-3&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&1\\3&-1\end{bmatrix}$

故知原始矩陣為 $\begin{bmatrix}-2&1\\3&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3&9&6&5\\7&18&13&11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&1&1\\2&9&5&4\end{bmatrix}$

故得原始訊息的編碼為 12，09，15，14，即 *lion*