3-2 貝氏定理

重點整理

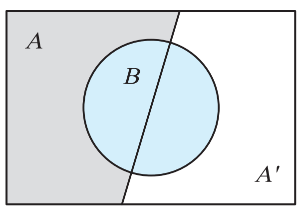
一、條件機率的乘法法則

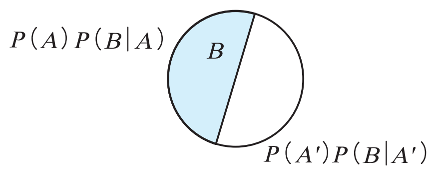
假設 A，B 是同一樣本空間 S 中的兩事件，且 $P(A)>0$，則
$P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$。

例：袋中有 4 顆白球、2 顆紅球，假設每顆球被選取的機會均等，今從袋中取球，每次取 1 球，取後不放回，連取兩次，試求第一次取到白球且第二次取到紅球的機率。

解：顯然，第一次取到白球的機率為 $\dfrac{4}{6}$，在第一次取到白球的條件下，第二次取球時剩 5 個球（3 白 2 紅），取到紅球的機率為 $\dfrac{2}{5}$，所以，第一次取到白球且第二次取到紅球的機率為 $\dfrac{4}{6}\times\dfrac{2}{5}=\dfrac{4}{15}$。

二、貝氏定理





令 A、B 為事件，若已知 $P(A)$、$P(A')$、$P(B|A)$、$P(B|A')$，且 $P(A)>0$，$P(A')>0$，$P(B)>0$，則在事件 B 發生的情況下，事件 A 發生的機率為

$$P(A|B)=\frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A)+P(A')P(B|A')}。$$

例：甲、乙兩部機器產量各占全公司的 30 %、70 %，產品不良率分別為 4 %、2 %。今任意抽驗一個產品，得知是不良品，則此產品是由甲機器生產的機率為 $\dfrac{0.3\times0.04}{0.3\times0.04+0.7\times0.02}=\dfrac{6}{13}$，是由乙機器生產的機率為

$$\frac{0.7\times0.02}{0.3\times0.04+0.7\times0.02}=\frac{7}{13}。$$

三、主觀機率與客觀機率

機率應符合生活經驗，但不能違背機率的性質。

1. 客觀機率：
   將多筆資料經過觀察、記錄、調查與試驗，所獲得的事件發生頻率（相對次數）當作事件發生的機率，也稱為頻率機率。
   例：擲一顆公正的骰子 100 次，偶數點出現 32 次，我們可以認為這顆骰子出現偶數點的機率是 $\dfrac{32}{100}$，也就是 0.32。
2. 主觀機率：根據個人經驗，對事件可能發生的程度所做的機率猜測。
   例：我覺得我這學期各科及格的機率有八成。

例題 1　條件機率的乘法法則(一)

袋中有 4 白球，3 黑球，甲、乙兩人依序各取出一球，取後不放回，試求：

(1) 甲、乙都取到白球的機率。（5 分）

(2) 乙取到白球的機率。（5 分）

解　設 A、B 分別代表甲、乙取到白球的事件

(1) 所求機率為 $P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)=\dfrac{4}{7}\times\dfrac{3}{6}=\dfrac{2}{7}$

(2) 所求機率為 $P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=P(A)P(B\mid A)+P(A')P(B\mid A')$

$$=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{24}{42}=\frac{4}{7}$$

例題 2　條件機率的乘法法則(二)

(1) 籤筒內有 16 支籤，其中 6 支標示有獎，且每支籤被抽中的機會均等。今甲、乙兩人依序抽籤，每人抽一支且抽完不放回，試求甲、乙兩人都中獎的機率。（5 分）

(2) 袋中有 4 顆白球、3 顆黑球，甲、乙兩人依序各取出一球，且每顆球被取出的機會均等，取後不放回，試求乙取到白球的機率。（5 分）

解　(1) 設 A、B 分別代表甲、乙中獎的事件

則由條件機率的乘法法則求得 $P(A\cap B)=P(A)P(B\mid A)=\dfrac{6}{16}\times\dfrac{5}{15}=\dfrac{1}{8}$

(2) 設 A、B 分別代表甲、乙取到白球的事件

$P(A)=\dfrac{4}{7}$

$P(B)=P(A\cap B)+P(A'\cap B)=P(A)P(B\mid A)+P(A')P(B\mid A')$

$$=\frac{4}{7}\times\frac{3}{6}+\frac{3}{7}\times\frac{4}{6}=\frac{24}{42}=\frac{4}{7}$$

例題 3　條件機率乘法法則的推廣

冰箱裡有 10 杯大小相同的飲料，使用膠膜封口，只知道其中 3 杯是咖啡，其餘都是紅茶。若每杯被取出的機會均等，今甲、乙、丙三人依序各取一杯，取出後立即飲用，試求：

(1) 甲取出咖啡的機率。（5 分）

(2) 甲、乙、丙三人都取出咖啡的機率。（5 分）

解　設 A、B、C 分別代表甲、乙、丙取出咖啡的事件

(1) $P(A)=\frac{3}{10}$

(2) $P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B|A)P(C|A\cap B)=\frac{3}{10}\times\frac{2}{9}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{120}$

例題 4　貝氏定理(一)

某公司產品來自甲、乙兩部機器，產量各占總量的 60 %、40 %，而產品的不合格率則分別為 2 %、1 %。今從倉庫任選一個產品測試，試求：

(1) 此產品不合格的機率。（5 分）

(2) 此不合格產品由甲機器製造的機率。（5 分）

解　將百分比化為小數計算，

(1) 由條件機率的乘法法則，所求機率為 $0.6\times0.02+0.4\times0.01=0.016$

(2) 由貝氏定理，所求機率為 $\frac{0.6\times0.02}{0.6\times0.02+0.4\times0.01}=\frac{12}{16}=\frac{3}{4}$

3-2

翰林用心教師用精益求精

例題 5　貝氏定理(二)

生技公司開發一種檢測方法，用來判斷是否感染某種病毒。已知真正感染病毒的人，檢出結果為陽性的比率為 0.85；未感染而檢出陽性（誤判感染）的比率則為 0.1。假設某社區有 20 % 的人已感染此病毒，今任選一人加以檢測，試求：

(1) 此人的檢驗結果為陽性的機率。（5 分）

(2) 承(1)，此人確實已感染病毒的機率。（5 分）

解 (1) 由條件機率的乘法法則知檢出陽性的機率為 $0.2\times0.85+0.8\times0.1=0.17+0.08=0.25$

(2) 由貝氏定理知此人確實感染的機率為 $\dfrac{0.17}{0.17+0.08}=\dfrac{17}{25}$

例題 6　貝氏定理(三)

校刊社的社員中，高一占 30 %，高二占 50 %，高三占 20 %。已知高一社員的 20 % 是男生，高二社員的 12 % 是男生，高三社員的 10 % 是男生。試問：

(1) 任抽一名社員，此社員是男生的機率。（5 分）

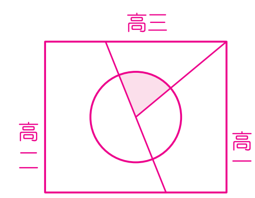
(2) 已知小偉（男生）是校刊社社員，他是高三學生的機率。（5 分）

解 (1) 由條件機率的乘法法則知所求為

$30\,\%\times20\,\%+50\,\%\times12\,\%+20\,\%\times10\,\%$

$=\dfrac{600}{10000}+\dfrac{600}{10000}+\dfrac{200}{10000}=0.06+0.06+0.02$

$=0.14$



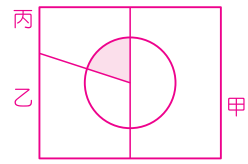
(2) 由貝氏定理可得 $\dfrac{0.02}{0.06+0.06+0.02}=\dfrac{2}{14}=\dfrac{1}{7}$

例題 7　貝氏定理(四)

某公司產品來自甲、乙、丙三部機器，三部機器的產量各占總量的 50 %、30 %、20 %，而產品的不合格率則分別為 2 %、2 %、1 %。今從倉庫任選一個產品測試，已知為不合格產品，試求此產品由丙機器製造的機率。(10 分)

解 將百分比化為小數計算，由貝氏定理可得

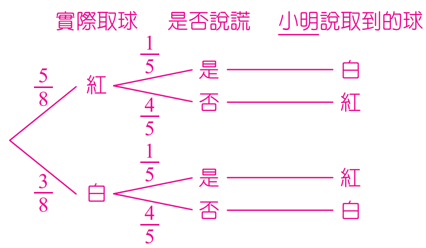
$$\frac{0.2\times 0.01}{0.5\times 0.02+0.3\times 0.02+0.2\times 0.01}=\frac{2}{18}=\frac{1}{9}$$



例題 8　貝氏定理(五)

袋中有 5 紅球、3 白球，小明隨機取出一球，並且說他取到紅球。根據過去的經驗，小明說謊的機率為 $\frac{1}{5}$，試求小明確實取到紅球的機率。(10 分)

解 小明說他取到紅球有兩種情形：



取到紅球且說他取到紅球，機率為 $\frac{5}{8}\times\frac{4}{5}=\frac{20}{40}$

取到白球但說他取到紅球 (說謊)，機率為 $\frac{3}{8}\times\frac{1}{5}=\frac{3}{40}$

故由貝氏定理可知小明確實取到紅球的機率為 $\dfrac{\frac{20}{40}}{\frac{20}{40}+\frac{3}{40}}=\frac{20}{23}$

例題 9　主觀機率與客觀機率

請分別說明下列有關機率的敘述，哪些是主觀機率？哪些是客觀機率？

(1) 小華說他這次段考各科全部及格的機率是 90 %。

(2) 工廠品管部門抽驗產品 500 個，發現不良品有 10 個，因此不良的比率是 2 %。

(3) 爸爸上班前告訴媽媽，今天回家吃晚餐的機率是 90 %。

(4) 爺爺看著天上的晚霞，說道：「這幾天颱風來襲的機率超過 80 %。」

(5) 小雯擲一枚硬幣 100 次，正面出現 43 次，所以小雯說這枚硬幣出現正面的機率是 0.43。

（每小題 2 分）

解 (1) 主觀機率：小華自己評估這一次段考各科的準備情形所做的判斷

(2) 客觀機率：品管部門根據實際抽驗的結果所做的評估

(3) 主觀機率：爸爸根據自己多年的經驗所判斷的結果

(4) 主觀機率：爺爺根據自己多年的觀察所做的判斷

(5) 客觀機率：根據實際投擲骰子所做的判斷

∴(1)(3)(4)是主觀機率，(2)(5)是客觀機率

3-2

例題 10　客觀機率

擲大、中、小共 3 枚硬幣 200 次，觀察各硬幣出現的正、反面情形，依大、中、小順序記錄如下表。若不計較硬幣的大小，試求下列兩種情形的客觀機率：

	正正正	正正反	正反正	正反反	反正正	反正反	反反正	反反反
次數	28	26	26	25	29	23	22	21

(1) 出現 2 正面 1 反面的機率。（5 分）

(2) 最多一個正面的機率。（5 分）

解

(1) 出現 2 正面 1 反面，機率為 $\dfrac{26+26+29}{200}=\dfrac{81}{200}=0.405$

(2) 最多一個正面，機率為 $\dfrac{25+23+22+21}{200}=\dfrac{91}{200}=0.455$