第 3 章　綜合演練

月　日　　得分

一、單選題（每題 5 分，共 10 分）

1. 一副撲克牌共有 52 張，有 4 種花色，分別是黑桃、紅心、方塊、梅花；每種花色都有 13 種點數，分別是 2、3、4、5、6、7、8、9、10、J、Q、K、A。小慧將一副撲克牌均勻洗牌後，任意抽出 1 張，已知花色是黑桃，則這張牌是黑桃 7 的機率為下列何者？

(A) $\frac{1}{52}$　(B) $\frac{1}{13}$　(C) $\frac{4}{13}$

(D) $\frac{7}{13}$　(E) $\frac{1}{4}$

解 所求機率為 $P(\text{黑桃 }7\mid\text{黑桃})=\dfrac{n(\text{黑桃且為 }7\text{ 點})}{n(\text{黑桃})}=\dfrac{1}{13}$

故選(B)

2. 已知樣本空間有 A、B 兩事件，A 事件發生的機率為 0.7，B 事件發生的機率為 0.3，A 發生且 B 發生的機率為 0.2，則 A 發生或 B 發生的機率為下列何者？

(A) 0.21　(B) 0.3　(C) 0.7

(D) 0.8　(E) 1

解 由已知可得，$P(A)=0.7$，$P(B)=0.3$，$P(A\cap B)=0.2$

則所求機率為 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.7+0.3-0.2=0.8$

故選(D)

第 3 章 綜合演練

翰林用心 教師用 精益求精

二、多選題（每題 5 分，所有選項均答對者得 5 分，錯一個選項得 3 分，錯兩個選項得 1 分，其餘不給分，共 10 分）

3. 設 A、B 為獨立事件，且 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{2}{3}$，則下列哪些正確？

(A) A、B 為互斥事件　(B) $P(A\cap B)=\dfrac{1}{3}$　(C) $P(A\cap B')=\dfrac{1}{9}$

(D) $P(A'\cap B)=\dfrac{2}{9}$　(E) $P(A'\cap B')=\dfrac{2}{9}$

解 (A) ×：A、B 為獨立事件

$\therefore P(A\cap B)=P(A)P(B)=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}\neq 0$，故 A、B 非互斥事件

(B) ×：由(A)的討論知 $P(A\cap B)=\dfrac{2}{9}$

(C) ○：A、B 為獨立事件，則 A、B' 也是獨立事件

$\therefore P(A\cap B')=P(A)P(B')=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{9}$

(D) ×：A、B 為獨立事件，則 A'、B 也是獨立事件

$\therefore P(A'\cap B)=P(A')P(B)=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{9}$

(E) ○：A、B 為獨立事件，則 A'、B' 也是獨立事件

$\therefore P(A'\cap B')=P(A')P(B')=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$

故選(C)(E)

4. 設 A、B 為獨立事件，若 $P(A)=\dfrac{1}{3}$，$P(B)=\dfrac{1}{3}$，試選出正確選項。

(A) $P(A)=P(A|B)$　(B) $P(A|B)=P(B|A)$　(C) $P(A|B)=\dfrac{1}{9}$

(D) $P(A'|B)=\dfrac{2}{3}$　(E) $P(B|A')=\dfrac{2}{9}$

解 (A) ○：由獨立事件的定義可知，B 事件發生與否，不影響 A 事件發生的機率

因此 $P(A)=P(A|B)$

(B) ○：$P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$，$P(B|A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$，$P(A)=\dfrac{1}{3}=P(B)$

故 $P(A|B)=P(B|A)$

(C) ×：$\because$ A、B 為獨立事件　$\therefore P(A|B)=P(A)=\dfrac{1}{3}$

(D) ○：A、B 為獨立事件，則 A'、B 也是獨立事件　$\therefore P(A'|B)=P(A')=\dfrac{2}{3}$

(E) ×：A、B 為獨立事件，則 A'、B 也是獨立事件　$\therefore P(B|A')=P(B)=\dfrac{1}{3}$

故選(A)(B)(D)

三、填充題（每格 5 分，共 60 分）

5. 為了慶祝校慶，話劇社演出一齣舞台劇。已知演員都是高一生或高二生，且女生有 9 名，男生有 7 名；高二演員中女生有 6 名、男生有 4 名。假設指導老師任選一名演員在演出前先對觀眾做解說，試求：

(1) 已知這名演員是高二生的情況下，是女生的機率為________。

(2) 已知這名演員是男生的情況下，是高二生的機率為________。

解 依條件作列聯表，並計算相關數據如下：

	高二	高一	小計
女	6	3	9
男	4	3	7
小計	10	6	16

(1) 所求機率為 $\dfrac{6}{10}=\dfrac{3}{5}$

(2) 所求機率為 $\dfrac{4}{7}$

6. 甲、乙兩人參加校內桌球比賽，根據平常練習與經驗判斷，甲、乙進入決賽的機率依序為 $\dfrac{3}{4}$、$\dfrac{1}{3}$，且兩人能否進入決賽是獨立事件，試求：

(1) 兩人中至少有一人進入決賽的機率為________。

(2) 兩人中恰有一人進入決賽的機率為________。

解 設 A、B 分別代表甲、乙進入決賽的事件，

則甲、乙進入決賽的機率分別為 $P(A)=\dfrac{3}{4}$、$P(B)=\dfrac{1}{3}$

(1) 兩人中至少有一人進入決賽的機率為

$$1-P(A'\cap B')=1-P(A')P(B')=1-\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{5}{6}$$

(2) 兩人中恰有一人進入決賽的機率為

$$P(A\cap B')+P(A'\cap B)=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

7. 甲、乙兩人同時解一數學問題，根據過去的經驗，甲每 3 題能解出 2 題，乙每 4 題能解出 3 題，已知兩人解題互不影響，試求：

(1) 恰有一人解出的機率為________。

(2) 此題被解出的機率為________。

解 設 A、B 分別代表甲、乙解出此題的事件，則 $P(A)=\dfrac{2}{3}$，$P(B)=\dfrac{3}{4}$

(1) 所求為甲解出且乙未解出的機率，或甲未解出且乙解出的機率，即

$$P(A\cap B')+P(A'\cap B)=P(A)P(B')+P(A')P(B)=\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}=\frac{5}{12}$$

(2) 所求機率為 1 − 甲未解出且乙未解出的機率，即

$$1-P(A'\cap B')=1-P(A')P(B')=1-\frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{11}{12}$$

8. 桌上有甲、乙兩個袋子，甲袋有 2 個紅球、3 個白球，乙袋有 4 個紅球、1 個白球。小偉擲 1 顆公正的骰子一次，若出現點數大於 2，則從甲袋抽出 1 球，否則從乙袋抽出 1 球。試求：

(1) 抽出紅球的機率為________。

(2) 承(1)，此紅球來自乙袋的機率為________。

解 設 S 為擲 1 顆公正骰子一次的樣本空間，即 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

設事件 A、B 分別代表擲出點數大於 2、點數不大於 2 的事件

即 $A=\{3,4,5,6\}$，$B=\{1,2\}$，得 $P(A)=\dfrac{2}{3}$、$P(B)=\dfrac{1}{3}$

故選到甲、乙袋的機率分別為 $\dfrac{2}{3}$、$\dfrac{1}{3}$

(1) 抽出紅球的機率為 $\dfrac{2}{3}\times\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{4}{5}=\dfrac{4}{15}+\dfrac{4}{15}=\dfrac{8}{15}$

(2) 由貝氏定理，此紅球來自乙袋的機率為 $\dfrac{\frac{4}{15}}{\frac{8}{15}}=\dfrac{1}{2}$

9. 甲、乙兩人同時打靶，每人一發，已知甲、乙命中率依序為 0.5，0.3，且兩人命中靶面的事件為獨立事件，試求：

(1) 靶面恰中一發的機率為________。

(2) 靶面恰中一發，且是由乙命中的機率為________。

解 設 A、B 分別代表甲、乙命中靶面的事件，則 $P(A)=0.5$，$P(B)=0.3$

(1) 所求機率為 $P(A\cap B')+P(A'\cap B)$

$$=P(A)P(B')+P(A')P(B)$$
$$=0.5\times0.7+0.5\times0.3$$
$$=0.35+0.15$$
$$=0.5$$

(2) 由貝氏定理，所求機率為 $\dfrac{0.15}{0.50}=\dfrac{3}{10}$

10. 設 A、B 是樣本空間 S 的兩事件，且 $P(A)=\dfrac{2}{3}$，$P(A\cup B)=\dfrac{3}{4}$，試依據下列條件求解 $P(B)$：

(1) A 與 B 是互斥事件，則 $P(B)=$________。

(2) A 與 B 是獨立事件，則 $P(B)=$________。

解 (1) A 與 B 是互斥事件，則 $A\cap B=\varnothing$，故 $P(A\cap B)=0$

由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$，得 $\dfrac{3}{4}=\dfrac{2}{3}+P(B)-0\Rightarrow P(B)=\dfrac{1}{12}$

(2) A 與 B 是獨立事件，則 $P(A\cap B)=P(A)P(B)$

由 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$，得 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A)P(B)$

故 $\dfrac{3}{4}=\dfrac{2}{3}+P(B)-\dfrac{2}{3}P(B)$，即 $\dfrac{1}{3}P(B)=\dfrac{1}{12}\Rightarrow P(B)=\dfrac{1}{4}$

四、計算題（每題 10 分，共 20 分）

11. 袋中有 1 白球 2 黑球，自袋中任取一球，甲、乙看過之後都說是白球。根據經驗，甲說實話的機率是 $\frac{7}{8}$，乙說實話的機率為 $\frac{3}{5}$，試求此球確實為白球的機率。

解 甲、乙看過之後都說是白球有兩種情形

取球	是否說實話
白	兩人都說實話
黑	兩人都沒說實話

取出白球且兩人都說白球，故知兩人都說實話

機率為 $\frac{1}{3}\times\frac{7}{8}\times\frac{3}{5}=\frac{21}{120}$

取出黑球且兩人都說白球，故知兩人都沒說實話

機率為 $\frac{2}{3}\times\frac{1}{8}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{120}$

故此球確實為白球的機率為 $\dfrac{\frac{21}{120}}{\frac{21}{120}+\frac{4}{120}}=\frac{21}{25}$

12. 科學研習社社員的年級與性別分配如下表，如果希望性別與年級獨立，試問應再招收幾名高一女生社員？

	高二	高一
男	15	10
女	12	5

解 假設再招收 x 名高一女生社員可以使性別與年級獨立，作列聯表如下：

	高二	高一	小計
男	15	10	25
女	12	$5+x$	$17+x$
小計	27	$15+x$	$42+x$

則高一且女生社員的機率等於高一社員機率乘以女生社員的機率

故 $\frac{5+x}{42+x}=\frac{15+x}{42+x}\times\frac{17+x}{42+x}$，解得 $x=3$，故應再招收 3 名高一女生社員