



第4章

矩陣與資料表格

4-1 矩陣的定義與運算

重點整理

一、矩陣的定義

1. 矩陣：

把一些數字排列成整齊的矩形陣列，稱為矩陣(matrix)。

矩陣的橫排稱為列，直排稱為行，每個位置都稱為元(entry)。

如下矩陣有 m 列 n 行，稱為 $m \times n$ 階矩陣，可以用 $[a_{ij}]_{m \times n}$ 表示，其中 a_{ij} 為第 i 列第 j 行交叉位置的元，稱為矩陣的第 (i, j) 元。

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

例： $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 \\ 6 & 11 & 1 \\ 12 & 7 & 9 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ ，它有 4 列 3 行，是 4×3 階矩陣。

以 $[a_{ij}]_{4 \times 3}$ 表示這個矩陣，即 $A = [a_{ij}]_{4 \times 3}$ ，其中 a_{ij} 代表 A 的元，例如， $a_{23} = 1$ ， $a_{42} = 4$ 。

2. 零矩陣與單位方陣：

(1) 零矩陣：若 $m \times n$ 矩陣的每一個元都是 0，稱為零矩陣，記為 $O_{m \times n}$ 。

例： $O_{2 \times 3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

特別地， n 階零方陣可以用 O_n 簡記，如 $O_{2 \times 2} = O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

(2) 單位方陣： n 階方陣主對角線上的元($a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{nn}$)都是 1，其他元都是 0，稱為 n 階單位方陣，記為 I_n 。

例： $I_1 = [1]$ ， $I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ， $I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。

二、矩陣的運算

階數相同的矩陣可以做加法或減法運算，只要將相同位置的元相加或相減即可。

1. 矩陣的加法：

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ， $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ，則 $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$ 。

例： $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ，則 $A + B = \begin{bmatrix} 3+3 & 4+1 \\ 2+6 & 5+0 \\ 1+2 & 2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 5 \\ 8 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ 。



4-1

翰林用心
教師用
精益求精

加法反矩陣：將矩陣 A 的每一個元都乘以 -1 ，以 $-A$ 表示。

例： $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，則 $-A = \begin{bmatrix} -3 & -4 \\ -2 & -5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ 稱為 A 的加法反矩陣。

顯然， $A + (-A) = O$ 。

(任何矩陣 A 與其加法反矩陣 $-A$ 相加，其結果必為零矩陣)

2. 矩陣的減法：

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ， $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ ，則 $A - B = [a_{ij} - b_{ij}]_{m \times n}$ 。

例： $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ ，則 $A - B = \begin{bmatrix} 3-3 & 4-1 \\ 2-6 & 5-0 \\ 1-2 & 2-4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -4 & 5 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ 。

3. 矩陣的係數積：

將矩陣 $A + A$ 記為 $2A$ ，得知 $2A$ 的每一個元都是 A 相同位置元的 2 倍。同理， rA 的每個元都是 A 相同位置元的 r 倍。類似 rA 這種運算，稱為矩陣的係數積。

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ， r 是實數，則 $rA = [ra_{ij}]_{m \times n}$ 。

例： $A = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$ ，則 $3A = \begin{bmatrix} 3 \times 7 & 3 \times 2 & 3 \times 1 \\ 3 \times 2 & 3 \times 3 & 3 \times 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 & 6 & 3 \\ 6 & 9 & 15 \end{bmatrix}$ ，
 $-2A = \begin{bmatrix} -14 & -4 & -2 \\ -4 & -6 & -10 \end{bmatrix}$ 。

4. 矩陣的乘法：

設 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ， $B = [b_{ij}]_{n \times p}$ ，則 $C = AB$ 是一個 $m \times p$ 階矩陣，即 $C = [c_{ij}]_{m \times p}$ ，其中 $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}$ 。

注意： 矩陣 A 的行數 = 矩陣 B 的列數 = n ， A 、 B 才能相乘(也就是 AB 有意義)。

例： $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$ ， $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$ ，

則 $AB = \begin{bmatrix} 3 \times 1 + 1 \times 2 + 0 \times 5 & 3 \times 0 + 1 \times 3 + 0 \times 1 \\ 2 \times 1 + 4 \times 2 + 1 \times 5 & 2 \times 0 + 4 \times 3 + 1 \times 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 15 & 13 \end{bmatrix}$ 。

請注意， A 是 2×3 階矩陣， B 是 3×2 階矩陣， AB 是 2×2 階矩陣。

矩陣乘法注意事項：

(1) AB 有意義， BA 不一定有意義。

例： $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \end{bmatrix}$ ，但 $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ 無意義(不能相乘)。

(2) AB 有意義， BA 有意義， AB 不一定等於 BA 。

例： $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix}$ ， $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ ，兩者都有意義，
 但 $\begin{bmatrix} 4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ 。

(3) $AB = O$ 時， A 、 B 不一定至少有一個零矩陣(可能 A 、 B 都不是零矩陣)。

例： $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，但 $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \neq O$ ， $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq O$ 。



(4) $AB = AC$ 時，不一定 $B = C$ 。

例： $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ，但 $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 。

矩陣乘法的性質：

假設以下的矩陣乘法都有意義，矩陣乘法具有下列性質：

- (1) $(AB)C = A(BC)$ 。
- (2) $A(B + C) = AB + AC$ 。
- (3) $(A + B)C = AC + BC$ 。
- (4) $r(AB) = (rA)B = A(rB)$ 。

例題 1 資料表的製作與應用

開會時，學務主任報告：「根據調查，學生上學情形如下。10 年級學生步行 68 人、騎腳踏車 11 人、搭乘公車 79 人、其他方式 22 人，11 年級學生步行 60 人、騎腳踏車 15 人、搭乘公車 76 人、其他方式 31 人，12 年級學生步行 58 人、騎腳踏車 21 人、搭乘公車 70 人、其他方式 39 人。」請將這些訊息以資料表呈現，並統計各年級人數、各種上學方式的人數，以及三個年級總人數。(10 分)

解

年級	步行	騎腳踏車	搭乘公車	其他	小計
10	68	11	79	22	180
11	60	15	76	31	182
12	58	21	70	39	188
小計	186	47	225	92	550

例題 2 矩陣基本概念

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ 8 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ ，試寫出：

- (1) 矩陣 A 的階數。(4 分)
- (2) A 的第 $(2, 3)$ 元。(4 分)
- (3) 6 在第幾列，第幾行？(4 分)

解 (1) 矩陣 A 為 3×3 階矩陣
 (2) A 的第 $(2, 3)$ 元為 5
 (3) 6 在第 3 列，第 2 行



4-1

● 例題 3 矩陣的相等

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 3 & a & 4 \\ b & 2 & c \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} s & 6 & t \\ 5 & u & 1 \end{bmatrix}$, 已知 $A = B$, 試求 a 、 b 、 c 、 s 、 t 、 u 。(10 分)

解 因為 $A = B$, 所以對應位置的元都相等

故得 $a = 6$, $b = 5$, $c = 1$, $s = 3$, $t = 4$, $u = 2$

● 例題 4 矩陣的加減法

已知 $A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, 試求:

(1) $A + B$ 。(4 分)

(2) 矩陣 C , 使得 $A + C = O$ (零矩陣)。(4 分)

解 (1) $A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

(2) $A + C = O$, 則 $C = -A = \begin{bmatrix} -4 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$

● 例題 5 矩陣的係數積

矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, 試求:

(1) $2A - B$ 。(4 分)

(2) $3A + 2B - C$ 。(4 分)

解 (1) $2A - B = \begin{bmatrix} 10 & -6 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

(2) $3A + 2B - C = \begin{bmatrix} 15 & -9 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -12 \\ 6 & 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & -22 \\ 12 & 13 \end{bmatrix}$



● 例題 6 矩陣方程式

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$, 且 $2X + A = 3B$, 試求:

(1) $3B$ 。(4 分)

(2) 矩陣 X 。(4 分)

解 (1) $3B = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ -9 & 9 \end{bmatrix}$

(2) $2X + A = 3B$, 移項得 $2X = 3B - A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ -9 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ -12 & 10 \end{bmatrix}$

故得 $X = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -6 & 5 \end{bmatrix}$

● 例題 7 矩陣的乘法

已知矩陣 $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$, 試求:

(1) AB 。(4 分)

(2) AC 。(4 分)

解 (1) $AB = \begin{bmatrix} 4 \times 1 + 2 \times (-1) & 4 \times 2 + 2 \times 3 & 4 \times 1 + 2 \times 2 \\ 1 \times 1 + 3 \times (-1) & 1 \times 2 + 3 \times 3 & 1 \times 1 + 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 14 & 8 \\ -2 & 11 & 7 \end{bmatrix}$

(2) $AC = \begin{bmatrix} 4 \times 1 + 2 \times (-2) & 4 \times 3 + 2 \times 2 \\ 1 \times 1 + 3 \times (-2) & 1 \times 3 + 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 16 \\ -5 & 9 \end{bmatrix}$

● 例題 8 以算式定義矩陣的元

已知矩陣 $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$, 其中 $a_{ij} = 2i + 3j$, 試求矩陣 A 。(10 分)

解 $A = [a_{ij}]_{2 \times 3}$ 是一個 2 列 3 行的矩陣, 有 6 個元

其中第 i 列, 第 j 行的元 (a_{ij}) 定義為 $a_{ij} = 2i + 3j$

所以 $a_{11} = 2 \times 1 + 3 \times 1 = 5$, $a_{12} = 2 \times 1 + 3 \times 2 = 8$, $a_{13} = 2 \times 1 + 3 \times 3 = 11$

$a_{21} = 2 \times 2 + 3 \times 1 = 7$, $a_{22} = 2 \times 2 + 3 \times 2 = 10$, $a_{23} = 2 \times 2 + 3 \times 3 = 13$

故得 $A = \begin{bmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \end{bmatrix}$



4-1

翰林用心
教師用
精益求精

● 例題 9 矩陣的加減法與平方

已知二階方陣 A 、 B ， $A+B=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ ， $A-B=\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ，試求 A^2-B^2 。(10 分)

解 $A=\frac{1}{2}[(A+B)+(A-B)]=\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$B=(A+B)-A=\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\text{故 } A^2-B^2=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 15 & 21 \end{bmatrix}$$

● 例題 10 矩陣乘法與係數積的應用

某超商出售三種容量的咖啡，售價分別是大杯 45 元、中杯 35 元、小杯 25 元，已知週一售出大杯 22 杯、中杯 40 杯、小杯 10 杯，週二售出大杯 30 杯、中杯 20 杯、小杯 20 杯，週三售出大杯 30 杯、中杯 22 杯、小杯 10 杯。

- (1) 試以 1×3 矩陣 A 表示大杯、中杯、小杯的售價。(4 分)
- (2) 試以 3×3 矩陣 X 表示週一、週二、週三售出大杯、中杯、小杯的數量。第一行為週一的數量，第一、二、三列分別是大、中、小杯的數量。(4 分)
- (3) 利用矩陣乘法 AX 計算週一、週二、週三的咖啡銷售金額。(4 分)
- (4) 假設咖啡的獲利率是售價的 40%，試計算這三天的獲利分別是多少元。(4 分)

解 (1) $A=[45 \quad 35 \quad 25]$

$$(2) X=\begin{bmatrix} 22 & 30 & 30 \\ 40 & 20 & 22 \\ 10 & 20 & 10 \end{bmatrix}$$
$$(3) AX=[45 \quad 35 \quad 25]\begin{bmatrix} 22 & 30 & 30 \\ 40 & 20 & 22 \\ 10 & 20 & 10 \end{bmatrix}=[2640 \quad 2550 \quad 2370]$$

這三天銷售金額分別是 2640 元，2550 元，2370 元

$$(4) 0.4[2640 \quad 2550 \quad 2370]=[1056 \quad 1020 \quad 948]$$

這三天的獲利分別是 1056 元，1020 元，948 元

